

CÁC CHỦ ĐỀ VỀ BẤT ĐẲNG THỨC - CÁC ĐỊNH LÝ VÀ CÁCH CHỨNG MINH

from Hojoo Lee - translated by Nguyễn Ngọc Tiến - chưa chính thức công bố

Giới thiệu

Bất đẳng thức được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực Toán học. Mục đích của tập sách *hướng dẫn* này nêu lên các cách chứng minh cơ bản trong lý thuyết bất đẳng thức. Độc giả sẽ gặp các bất đẳng thức cổ điển như *bất đẳng thức Schur*, *định lý Muirhead*, *bất đẳng thức Cauchy-Schwarz*, *bất đẳng thức trung bình lũy thừa*, *bất đẳng thức AM-GM*, và *định lý Hölder*. Tôi sẵn sàng lắng nghe ý kiến đóng góp quý báu từ phía độc giả. Các bạn có thể gửi e-mail tới tôi qua địa chỉ ultrametric@gmail.com

Gửi tới các em học sinh - sinh viên

Các độc giả của tôi là các em học sinh các trường trung học hay các sinh viên đang theo học các trường đại học. Các cách nêu ra trong tập sách này chỉ là các mẹo nhỏ của một "khối băng khổng lồ bất đẳng thức". Các em học sinh, sinh viên nên tìm ra cách giải cho riêng mình để "xử lý tốt" các bài toán đa dạng khác. Nhà toán học đại tài Hungary - Paul Erdős đã thú vị khi nói rằng *Thượng đế có một quyển sách siêu việt với mọi định lý và cách chứng minh hay nhất*. Tôi khuyến khích các độc giả gửi tôi các bài giải hay, đầy sáng tạo của riêng mình của các bài toán trong tập sách này. **Chúc vui vẻ!**

Lời tựa

Tôi rất cảm ơn **Orlando Döhring** và **Darij Grinberg** gửi cho tôi file Tex bộ sưu tập các bất đẳng thức. Tôi cũng cảm ơn **Marian Muresan** về các bài toán hay. Tôi cũng lấy làm thú vị khi anh **Cao Minh Quang** gửi tôi các bài toán Việt Nam cho các cách chứng minh hay về bất đẳng thức Nesbitt. Tôi xin cảm tạ **Stanley Rabinowitz** đã gửi cho tôi bài báo *On The Computer Solution of Symmetric Homogeneous Triangle Inequalities - Bài giải trên máy tính bất đẳng thức tam giác đối xứng thuần nhất*.

Các tài nguyên trên Web

1. *MathLinks*, <http://www.mathlinks.ro>
2. *Art of Problem Solving*, <http://www.artofproblemsolving.com>
3. *MathPro Press*, <http://www.mathpropress.com>
4. K. S. Kedlaya, $A < B$, <http://www.unl.edu/amc/a-activities/a4-for-students/s-index.html>
5. T. J. Mildorf, *Olympiad Inequalities*, <http://web.mit.edu/tmildorf/www>

MỤC LỤC

	<i>trang</i>
Mục lục	III
Chương 1: Bất đẳng thức Hình học	1
1.1 Phép thế Ravi	1
1.2 Các phương pháp lượng giác	8
1.3 Các ứng dụng của Số Phức	14
Chương 2: Bốn cách chứng minh cơ bản	16
2.1 Phép thay thế lượng giác	16
2.2 Phép thay thế Đại Số	20
2.3 Định lý hàm tăng	28
2.4 Thiết lập cận mới	31
Chương 3: Thuần nhất hóa và Chuẩn hóa	36
3.1 Thuần nhất hóa	36
3.2 Bất đẳng thức Schur và Định lý Muirhead	39
3.3 Chuẩn hóa	45
3.4 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và Bất đẳng thức Hölder	50
Chương 4: Tính lồi	56
4.1 Bất đẳng thức Jensen	56
4.2 Các trung bình lũy thừa	60
4.3 Bất đẳng thức Trội	63
4.4 Bất đẳng thức áp dụng đường thẳng	65
Chương 5: Bài Toán	68
5.1 Các bất đẳng thức đa biến	68
5.2 Các bài toán trong hội thảo Putnam	78

CHƯƠNG 1

BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Sự sung sướng khi ai đó chứng minh một bài toán cũng như khi chính tôi chứng minh nó vậy. E. Landau

1.1 Phép thế Ravi

Nhiều bất đẳng thức được đơn giản hóa bằng các phép thế thích hợp. Chúng ta bắt đầu với bất đẳng thức hình học cổ điển. Bất đẳng thức hình học *không tầm thường* đầu tiên¹ là gì nhỉ? Vào năm 1746, Chapple đã chứng minh rằng

Định lý 1.1.1. (Chapple 1746, Euler 1765) Cho R và r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC . Khi đó, ta có $R \geq 2r$ và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Chứng minh. Cho $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ và $S = [ABC]$.² Ta nhớ lại đồng nhất thức: $S = \frac{abc}{4R}$, $S = rs$, $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Vì vậy, $R \geq 2r$ tương đương với $\frac{abc}{4S} \geq 2\frac{S}{s}$ hay $abc \geq 8\frac{S^2}{s}$ hay $abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$. Ta cần chứng minh điều khẳng định sau. \square

Định lý 1.1.2. ([AP], A. Padoa) Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Khi đó, ta có

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c) \text{ hay } abc \geq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Chứng minh. Ta sử dụng phép thế Ravi: Vì a, b, c là các cạnh của tam giác, nên tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. (Tại sao vậy?) Khi đó, bất đẳng thức đã cho trở thành $(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz$ với $x, y, z > 0$. Tuy nhiên, ta lại được

$$(y+z)(z+x)(x+y) - 8xyz = x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0.$$

\square

Bài tập 1. Cho ABC là một tam giác vuông. Chứng tỏ rằng

$$R \geq (1 + \sqrt{2})r.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

¹Bất đẳng thức hình học đầu tiên là bất đẳng thức tam giác: $AB + BC \geq AC$

²Trong tập sách này, $[P]$ ký hiệu là diện tích của đa giác P .

Thật tự nhiên khi hỏi rằng bất đẳng thức trong định lý 2 có xảy ra không khi các số thực dương tùy ý a, b, c ? Đúng vậy ! Có thể chứng minh bất đẳng thức mà không cần thêm điều kiện a, b, c là các cạnh của một tam giác:

Định lý 1.1.3. Cho $x, y, z > 0$. Khi đó, ta có $xyz \geq (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Chứng minh. Vì bất đẳng thức đối xứng theo các biến, không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó, ta có $x + y > z$ và $z + x > y$. Nếu $y + z > x$, thì x, y, z là chiều dài các cạnh của một tam giác. Trong trường hợp này, bằng định lý 2, cho ta kết quả. Bây giờ, ta có thể giả sử rằng $y + z \leq x$. Khi đó, $xyz > 0 \geq (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$. \square

Bất đẳng thức trong định lý 2 xảy ra khi một trong các x, y, z bằng 0:

Định lý 1.1.4. Cho $x, y, z \geq 0$. Khi đó, ta có $xyz \geq (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$.

Chứng minh. Vì $x, y, z \geq 0$, ta có thể tìm được dãy số dương $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ với

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

Áp dụng định lý 2, suy ra

$$x_n y_n z_n \geq (y_n + z_n - x_n)(z_n + x_n - y_n)(x_n + y_n - z_n).$$

Bây giờ, lấy giới hạn cả hai phía, ta được kết quả. \square

Rõ ràng, bất đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$. Tuy nhiên, $xyz = (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$ và $x, y, z \geq 0$ không đảm bảo rằng $x = y = z$. Thực vậy, với $x, y, z \geq 0$, bất đẳng thức $xyz = (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$ tương đương với

$$x = y = z \text{ hay } x = y, z = 0 \text{ hay } y = z, x = 0 \text{ hay } z = x, y = 0.$$

Ta có kiểm tra ngay rằng

$$xyz - (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z) = x(x - y)(x - z) + y(y - z)(y - x) + z(z - x)(z - y).$$

Vì vậy, định lý 4 là một trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Schur.

Bài toán 1. (IMO 2000/2, Titu Andreescu đề nghị) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Cách giải 1. Vì $abc = 1$, ta thực hiện thay thế $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$.³ Ta viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng của x, y, z :

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y}\right) \left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z}\right) \left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow xyz \geq (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z).$$

\square

³Cho ví dụ, lấy $x = 1, y = \frac{1}{a}, z = \frac{1}{ab}$.

Phép thế *Ravi* rất thích hợp đối với các bất đẳng thức với các cạnh a, b, c của tam giác. Sau khi sử dụng phép thế *Ravi*, ta có thể bỏ đi điều kiện chúng là các cạnh của một tam giác.

Bài toán 2. (IMO 1983/6) Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Cách giải 1. Sau khi đặt $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ với $x, y, z > 0$, nó trở thành

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \quad \text{hay} \quad \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z,$$

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(y + z + x) \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) \geq (x + y + z)^2.$$

□

Bài tập 2. Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Chứng tỏ rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Bài tập 3. (Darij Grinberg) Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 2b^2a - 2c^2b - 2a^2c \geq 0,$$

và

$$3a^2b + 3b^2c + 3c^2a - 3abc - 2b^2a - 2c^2b - 2a^2c \geq 0.$$

Bây giờ ta nói đến bất đẳng thức Weitzenböck và các bất đẳng thức liên quan.

Bài toán 3. (IMO 1961/2, bất đẳng thức Weitzenböck) Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác với diện tích S . Chứng tỏ rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S.$$

Giải. Viết $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ với $x, y, z > 0$. Điều này tương đương

$$((y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2)^2 \geq 48(x+y+z)xyz,$$

có thể suy ra từ bất đẳng thức sau:

$$((y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2)^2 \geq 16(yz + zx + xy)^2 \geq 16 \cdot 3(xy \cdot yz + yz \cdot zx + xy \cdot yz).$$

Ở đây, chúng ta sử dụng bất đẳng thức $p^2 + q^2 \geq 2pq$ và $(p+q+r)^2 \geq 3(pq + qr + rp)$. □

Định lý 1.1.5. (bất đẳng thức Hadwiger-Finsler) Bất kỳ tam giác ABC với các cạnh a, b, c và diện tích F , bất đẳng thức sau đây xảy ra.

$$2ab + 2bc + 2ca - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}F.$$

Chứng minh 1. Sau khi thực hiện phép thế $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, trong đó $x, y, z > 0$, nó trở thành

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x + y + z)},$$

ta suy ra từ đẳng thức

$$(xy + yz + zx)^2 - 3xyz(x + y + z) = \frac{(xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2}{2}.$$

□

Chứng minh 2. Chúng ta sử dụng tính chất hàm lồi. Có nhiều cách dẫn đến đẳng thức sau:

$$\frac{2ab + 2bc + 2ca - (a^2 + b^2 + c^2)}{4F} = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}.$$

Vì $\tan x$ là hàm lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$, Bất đẳng thức Jensen chứng tỏ rằng

$$\frac{2ab + 2bc + 2ca - (a^2 + b^2 + c^2)}{4F} \geq 3 \tan \left(\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3} \right) = \sqrt{3}.$$

□

Tsintsifas đã chứng minh bất đẳng thức tổng quát của bất đẳng thức Weitzenböck và bất đẳng thức Nesbitt.

Định lý 1.1.6. (Tsintsifas) Cho p, q, r là các số thực dương và cho a, b, c ký hiệu các cạnh một tam giác với diện tích F . Khi đó, ta có

$$\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{r+p}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}F.$$

Chứng minh. (V. Pambuccian) Sử dụng bất đẳng thức Hadwiger-Finsler, nó đủ để chứng tỏ rằng

$$\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{r+p}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

hay

$$\left(\frac{p+q+r}{q+r} \right) a^2 + \left(\frac{p+q+r}{r+p} \right) b^2 + \left(\frac{p+q+r}{p+q} \right) c^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

hay

$$((q+r) + (r+p) + (p+q)) \left(\frac{1}{q+r}a^2 + \frac{1}{r+p}b^2 + \frac{1}{p+q}c^2 \right) \geq (a+b+c)^2.$$

Tuy nhiên, điều này rút ra từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz.

□

Định lý 1.1.7. (bất đẳng thức Neuberg-Pedoe) Cho a_1, b_1, c_1 ký hiệu các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ với diện tích F_1 . Cho a_2, b_2, c_2 ký hiệu các cạnh của tam giác $A_2B_2C_2$ với diện tích F_2 . Khi đó, ta có

$$a_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) + b_1^2(c_2^2 + a_2^2 - b_2^2) + c_1^2(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) \geq 16F_1F_2.$$

Nó có phải là bất đẳng thức tổng quát của bất đẳng thức Weitzenböck's. (Tại sao?) Trong [GC], G. Chang đã chứng minh bất đẳng thức Neuberg-Pedoe bằng việc sử dụng số phức. Với các nhận định bằng hình học và các chứng minh bất đẳng thức Neuberg-Pedoe, xem trong [DP] hay [GI, trang.92-93]. Ở đây, chúng ta đưa ra ba cách chứng minh đại số.

Bổ đề 1.1.1.

$$a_1^2(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) + b_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) + c_1^2(c_2^2 + a_2^2 - b_2^2) > 0.$$

Chứng minh. Hãy quan sát rằng nó tương đương

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) > 2(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2).$$

Từ công thức Heron, ta thấy rằng, với $i = 1, 2$,

$$16F_i^2 = (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)^2 - 2(a_i^4 + b_i^4 + c_i^4) > 0 \quad \text{hay} \quad a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 > \sqrt{2(a_i^4 + b_i^4 + c_i^4)}.$$

Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz nói rằng

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) > 2\sqrt{(a_1^4 + b_1^4 + c_1^4)(a_2^4 + b_2^4 + c_2^4)} \geq 2(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2).$$

□

Chứng minh 1. ([LC1], Carlitz) Từ bổ đề, ta được

$$L = a_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) + b_1^2(c_2^2 + a_2^2 - b_2^2) + c_1^2(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) > 0,$$

Vì thế, ta cần chứng tỏ rằng

$$L^2 - (16F_1^2)(16F_2^2) \geq 0.$$

Ta dễ dàng kiểm tra đẳng thức sau

$$L^2 - (16F_1^2)(16F_2^2) = -4(UV + VW + WU),$$

trong đó

$$U = b_1^2 c_2^2 - b_2^2 c_1^2, \quad V = c_1^2 a_2^2 - c_2^2 a_1^2 \quad \text{và} \quad W = a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_1^2.$$

Sử dụng đẳng thức

$$a_1^2 U + b_1^2 V + c_1^2 W = 0 \quad \text{hay} \quad W = -\frac{a_1^2}{c_1^2} U - \frac{b_1^2}{c_1^2} V,$$

ta có thể dẫn ra rằng

$$UV + VW + WU = -\frac{a_1^2}{c_1^2} \left(U - \frac{c_1^2 - a_1^2 - b_1^2}{2a_1^2} V \right)^2 - \frac{4a_1^2 b_1^2 - (c_1^2 - a_1^2 - b_1^2)^2}{4a_1^2 c_1^2} V^2.$$

Suy ra

$$UV + VW + WU = -\frac{a_1^2}{c_1^2} \left(U - \frac{c_1^2 - a_1^2 - b_1^2}{2a_1^2} V \right)^2 - \frac{16F_1^2}{4a_1^2 c_1^2} V^2 \leq 0.$$

□

Carlitz thấy rằng bất đẳng thức Neuberg-Pedoe có thể rút ra từ bất đẳng thức Aczél.

Định lý 1.1.8. (bất đẳng thức Aczél) Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực dương thỏa mãn

$$a_1^2 \geq a_2^2 + \dots + a_n^2 \text{ và } b_1^2 \geq b_2^2 + \dots + b_n^2.$$

Khi đó, ta có

$$a_1 b_1 - (a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) \geq \sqrt{(a_1^2 - (a_2^2 + \dots + a_n^2))(b_1^2 - (b_2^2 + \dots + b_n^2))}$$

Chứng minh. ([AI]) Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$a_1 b_1 \geq \sqrt{(a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_2^2 + \dots + b_n^2)} \geq a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Khi đó, bất đẳng thức trên tương đương

$$(a_1 b_1 - (a_2 b_2 + \dots + a_n b_n))^2 \geq (a_1^2 - (a_2^2 + \dots + a_n^2))(b_1^2 - (b_2^2 + \dots + b_n^2)).$$

Trong trường hợp $a_1^2 - (a_2^2 + \dots + a_n^2) = 0$, nó tầm thường. Vì vậy, bây giờ ta giả sử rằng $a_1^2 - (a_2^2 + \dots + a_n^2) > 0$. Điều này làm ta nghĩ đến đa thức bậc hai sau

$$P(x) = (a_1 x - b_1)^2 - \sum_{i=2}^n (a_i x - b_i)^2 = \left(a_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2\right) x^2 + 2 \left(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i\right) x + \left(b_1^2 - \sum_{i=2}^n b_i^2\right).$$

Vì $P\left(\frac{b_1}{a_1}\right) = -\sum_{i=2}^n \left(a_i \left(\frac{b_1}{a_1}\right) - b_i\right)^2 \leq 0$ và vì hệ số của x^2 trong đa thức bậc hai P là số dương, P có ít nhất một nghiệm thực. Vì thế, P có biệt thức không âm. Suy ra

$$\left(2 \left(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i\right)\right)^2 - 4 \left(a_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2\right) \left(b_1^2 - \sum_{i=2}^n b_i^2\right) \geq 0.$$

□

Chứng minh 2 của bất đẳng thức Neuberg-Pedoe. ([LC2], Carlitz) Ta viết lại dưới dạng $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - 2(a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2) \\ & \geq \sqrt{\left((a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)^2 - 2(a_1^4 + b_1^4 + c_1^4)\right) \left((a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)^2 - 2(a_2^4 + b_2^4 + c_2^4)\right)}. \end{aligned}$$

Ta áp dụng thay thế sau

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2, x_2 = \sqrt{2} a_1^2, x_3 = \sqrt{2} b_1^2, x_4 = \sqrt{2} c_1^2, \\ y_1 &= a_2^2 + b_2^2 + c_2^2, y_2 = \sqrt{2} a_2^2, y_3 = \sqrt{2} b_2^2, y_4 = \sqrt{2} c_2^2. \end{aligned}$$

Như trong chứng minh bổ đề 5, ta có

$$x_1^2 > x_2^2 + y_3^2 + x_4^2 \text{ và } y_1^2 > y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

Ta áp dụng bất đẳng thức Aczél, suy ra bất đẳng thức

$$x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 - x_4 y_4 \geq \sqrt{(x_1^2 - (x_2^2 + y_3^2 + x_4^2))(y_1^2 - (y_2^2 + y_3^2 + y_4^2))}.$$

□

Ta kết thúc phần này bằng một chứng minh rất đơn giản của một sinh viên năm nhất trong chương trình KMO⁴ mùa hè.

Chứng minh 3. Xét hai tam giác $\triangle A_1B_1C_1$ và $\triangle A_2B_2C_2$ trên \mathbb{R}^2 :

$$A_1(0, p_1), B_1(p_2, 0), C_1(p_3, 0), A_2(0, q_1), B_2(q_2, 0), \text{ và } C_2(q_3, 0).$$

Từ bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ suy ra rằng

$$\begin{aligned} & a_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) + b_1^2(c_2^2 + a_2^2 - b_2^2) + c_1^2(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) \\ = & (p_3 - p_2)^2(2q_1^2 + 2q_1q_2) + (p_1^2 + p_3^2)(2q_2^2 - 2q_2q_3) + (p_1^2 + p_2^2)(2q_3^2 - 2q_2q_3) \\ = & 2(p_3 - p_2)^2q_1^2 + 2(q_3 - q_2)^2p_1^2 + 2(p_3q_2 - p_2q_3)^2 \\ \geq & 2((p_3 - p_2)q_1)^2 + 2((q_3 - q_2)p_1)^2 \\ \geq & 4|(p_3 - p_2)q_1| \cdot |(q_3 - q_2)p_1| \\ = & 16F_1F_2. \end{aligned}$$

□

⁴Korean Mathematical Olympiads

1.2 Các phương pháp lượng giác

Trong phần này, ta áp dụng các phương pháp lượng giác để "xử lý" các bài bất đẳng thức hình học.

Định lý 1.2.1. (Định lý Erdős-Mordell) *Nếu từ một điểm P trong một tam giác cho trước ABC kẻ các đường vuông góc PH_1, PH_2, PH_3 với các cạnh của nó, thì $PA + PB + PC \geq 2(PH_1 + PH_2 + PH_3)$.*

Điều này Erdős nêu ra vào năm 1935, và sau đó Mordell chứng minh trong cùng năm. Bất đẳng thức này có nhiều cách chứng minh, André Avez sử dụng định lý Ptolemy, Leon Bankoff dựa vào góc trong các tam giác đồng dạng, V. Komornik dựa vào bất đẳng thức diện tích, hay Mordell và Barrow sử dụng lượng giác.

Chứng minh. ([MB], Mordell) Ta chuyển nó sang bất đẳng thức lượng giác. Cho $h_1 = PH_1$, $h_2 = PH_2$ và $h_3 = PH_3$. Áp dụng định lý Sin, Cosin ta được

$$\begin{aligned} PA \sin A = \overline{H_2 H_3} &= \sqrt{h_2^2 + h_3^2 - 2h_2 h_3 \cos(\pi - A)}, \\ PB \sin B = \overline{H_3 H_1} &= \sqrt{h_3^2 + h_1^2 - 2h_3 h_1 \cos(\pi - B)}, \\ PC \sin C = \overline{H_1 H_2} &= \sqrt{h_1^2 + h_2^2 - 2h_1 h_2 \cos(\pi - C)}. \end{aligned}$$

Vì thế, ta cần chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{\sin A} \sqrt{h_2^2 + h_3^2 - 2h_2 h_3 \cos(\pi - A)} \geq 2(h_1 + h_2 + h_3).$$

Vấn đề chính là biểu thức vế trái *quá nặng* dạng căn thức bậc hai. Mục tiêu của chúng ta là tìm cận dưới hơn mà không có căn thức. Để kết thúc điều này, ta biểu diễn biểu thức dưới dấu căn bậc hai dưới dạng **tổng của hai bình phương**.

$$\begin{aligned} \overline{H_2 H_3}^2 &= h_2^2 + h_3^2 - 2h_2 h_3 \cos(\pi - A) \\ &= h_2^2 + h_3^2 - 2h_2 h_3 \cos(B + C) \\ &= h_2^2 + h_3^2 - 2h_2 h_3 (\cos B \cos C - \sin B \sin C). \end{aligned}$$

Sử dụng $\cos^2 B + \sin^2 B = 1$ và $\cos^2 C + \sin^2 C = 1$, ta thấy rằng

$$\overline{H_2 H_3}^2 = (h_2 \sin C + h_3 \sin B)^2 + (h_2 \cos C - h_3 \cos B)^2.$$

Vì $(h_2 \cos C - h_3 \cos B)^2$ là không âm, ta được $\overline{H_2 H_3} \geq h_2 \sin C + h_3 \sin B$. Suy ra rằng

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyclic}} \frac{\sqrt{h_2^2 + h_3^2 - 2h_2 h_3 \cos(\pi - A)}}{\sin A} &\geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{h_2 \sin C + h_3 \sin B}{\sin A} \\ &= \sum_{\text{cyclic}} \left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} \right) h_1 \\ &\geq \sum_{\text{cyclic}} 2 \sqrt{\frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{\sin C}{\sin B}} h_1 \\ &= 2h_1 + 2h_2 + 2h_3. \end{aligned}$$

□

Ta sử dụng cùng cách để "xử lý" các bất đẳng thức hình học sau.

Bài toán 4. (IMO Short-list 2005) Trong một tam giác nhọn ABC , cho D, E, F, P, Q, R là chân các cao từ A, B, C, A, B, C tới BC, CA, AB, EF, FD, DE , tương ứng. Chứng minh rằng

$$p(ABC)p(PQR) \geq p(DEF)^2,$$

trong đó $p(T)$ ký hiệu chu vi của tam giác T .

Giải. Chúng ta hãy **euler**⁵ hóa bài toán này. Cho ρ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Thật dễ để chứng minh rằng $BC = 2\rho \sin A$ và $EF = 2\rho \sin A \cos A$. Vì $DQ = 2\rho \sin C \cos B \cos A$, $DR = 2\rho \sin B \cos C \cos A$, và $\angle FDE = \pi - 2A$, từ định lý Cosin cho ta

$$\begin{aligned} QR^2 &= DQ^2 + DR^2 - 2DQ \cdot DR \cos(\pi - 2A) \\ &= 4\rho^2 \cos^2 A [(\sin C \cos B)^2 + (\sin B \cos C)^2 + 2 \sin C \cos B \sin B \cos C \cos(2A)] \end{aligned}$$

hay

$$QR = 2\rho \cos A \sqrt{f(A, B, C)},$$

trong đó

$$f(A, B, C) = (\sin C \cos B)^2 + (\sin B \cos C)^2 + 2 \sin C \cos B \sin B \cos C \cos(2A).$$

Vậy, chúng ta cần giải bài sau:

$$\left(\sum_{\text{cyclic}} 2\rho \sin A \right) \left(\sum_{\text{cyclic}} 2\rho \cos A \sqrt{f(A, B, C)} \right) \geq \left(\sum_{\text{cyclic}} 2\rho \sin A \cos A \right)^2$$

hay

$$\left(\sum_{\text{cyclic}} \sin A \right) \left(\sum_{\text{cyclic}} \cos A \sqrt{f(A, B, C)} \right) \geq \left(\sum_{\text{cyclic}} \sin A \cos A \right)^2.$$

Công việc chúng ta tìm ra cận hợp lý của $\sqrt{f(A, B, C)}$. Một lần nữa, ta viết $f(A, B, C)$ như là **tổng của hai bình phương**. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= (\sin C \cos B)^2 + (\sin B \cos C)^2 + 2 \sin C \cos B \sin B \cos C \cos(2A) \\ &= (\sin C \cos B + \sin B \cos C)^2 + 2 \sin C \cos B \sin B \cos C [-1 + \cos(2A)] \\ &= \sin^2(C + B) - 2 \sin C \cos B \sin B \cos C \cdot 2 \sin^2 A \\ &= \sin^2 A [1 - 4 \sin B \sin C \cos B \cos C]. \end{aligned}$$

Vì vậy, chúng ta viết $1 - 4 \sin B \sin C \cos B \cos C$ như là tổng của hai bình phương. Mẹo ở đây là 1 bằng $(\sin^2 B + \cos^2 B)(\sin^2 C + \cos^2 C)$. Thật ra, ta được

$$\begin{aligned} 1 - 4 \sin B \sin C \cos B \cos C &= (\sin^2 B + \cos^2 B)(\sin^2 C + \cos^2 C) - 4 \sin B \sin C \cos B \cos C \\ &= (\sin B \cos C - \sin C \cos B)^2 + (\cos B \cos C - \sin B \sin C)^2 \\ &= \sin^2(B - C) + \cos^2(B + C) \\ &= \sin^2(B - C) + \cos^2 A. \end{aligned}$$

⁵euler động từ. (trong Toán học) chuyển các bài toán hình học tam giác thành các bài toán lượng giác

Vì thế ta suy ra

$$f(A, B, C) = \sin^2 A [\sin^2(B - C) + \cos^2 A] \geq \sin^2 A \cos^2 A$$

sao cho

$$\sum_{\text{cyclic}} \cos A \sqrt{f(A, B, C)} \geq \sum_{\text{cyclic}} \sin A \cos^2 A.$$

Vì vậy, chúng ta hoàn thành chứng minh nếu ta thiết lập

$$\left(\sum_{\text{cyclic}} \sin A \right) \left(\sum_{\text{cyclic}} \sin A \cos^2 A \right) \geq \left(\sum_{\text{cyclic}} \sin A \cos A \right)^2.$$

Thật vậy, ta thấy rằng nó là kết quả trực tiếp từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$(p + q + r)(x + y + z) \geq (\sqrt{px} + \sqrt{qy} + \sqrt{rz})^2,$$

trong đó p, q, r, x, y và z là các số thực dương. □

Ta có thể lấy cận dưới khác của $f(A, B, C)$:

$$\begin{aligned} f(A, B, C) &= (\sin C \cos B)^2 + (\sin B \cos C)^2 + 2 \sin C \cos B \sin B \cos C \cos(2A) \\ &= (\sin C \cos B - \sin B \cos C)^2 + 2 \sin C \cos B \sin B \cos C [1 + \cos(2A)] \\ &= \sin^2(B - C) + 2 \frac{\sin(2B)}{2} \cdot \frac{\sin(2C)}{2} \cdot 2 \cos^2 A \\ &\geq \cos^2 A \sin(2B) \sin(2C). \end{aligned}$$

Khi đó, chúng ta có thể sử dụng điều này để chọn cận dưới khác của chu vi tam giác PQR :

$$p(PQR) = \sum_{\text{cyclic}} 2\rho \cos A \sqrt{f(A, B, C)} \geq \sum_{\text{cyclic}} 2\rho \cos^2 A \sqrt{\sin 2B \sin 2C}$$

Vì thế, ta xét bất đẳng thức sau:

$$p(ABC) \sum_{\text{cyclic}} 2\rho \cos^2 A \sqrt{\sin 2B \sin 2C} \geq p(DEF)^2$$

hay

$$\left(2\rho \sum_{\text{cyclic}} \sin A \right) \left(\sum_{\text{cyclic}} 2\rho \cos^2 A \sqrt{\sin 2B \sin 2C} \right) \geq \left(2\rho \sum_{\text{cyclic}} \sin A \cos A \right)^2.$$

hay

$$\left(\sum_{\text{cyclic}} \sin A \right) \left(\sum_{\text{cyclic}} \cos^2 A \sqrt{\sin 2B \sin 2C} \right) \geq \left(\sum_{\text{cyclic}} \sin A \cos A \right)^2.$$

Tuy nhiên, nó trở thành bất đẳng thức không đúng. Cố bác bỏ điều này thử xem!

Bài toán 5. Cho I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Chứng minh rằng, với mọi điểm X ,

$$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \geq abc.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức tam giác này suy ra từ bất đẳng thức sau:

$$aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 = (a + b + c)XI^2 + abc. \quad ^6$$

Có nhiều cách thiết lập đẳng thức này. Để **euler** hóa điều này, chúng ta xét một hình trên mặt phẳng Descartes sao cho $A(c \cos B, c \sin B)$, $B(0, 0)$ và $C(a, 0)$. Đặt r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $s = \frac{a+b+c}{2}$, ta được $I(s - b, r)$. Ta biết rằng

$$r^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}.$$

Đặt $X(p, q)$. Mặt khác, ta được

$$\begin{aligned} & aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 \\ &= a[(p - c \cos B)^2 + (q - c \sin B)^2] + b(p^2 + q^2) + c[(p - a)^2 + q^2] \\ &= (a + b + c)p^2 - 2acp(1 + \cos B) + (a + b + c)q^2 - 2acq \sin B + ac^2 + a^2c \\ &= 2sp^2 - 2acp \left(1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) + 2sq^2 - 2acq \frac{[\triangle ABC]}{\frac{1}{2}ac} + ac^2 + a^2c \\ &= 2sp^2 - p(a + c + b)(a + c - b) + 2sq^2 - 4q[\triangle ABC] + ac^2 + a^2c \\ &= 2sp^2 - p(2s)(2s - 2b) + 2sq^2 - 4qsr + ac^2 + a^2c \\ &= 2sp^2 - 4s(s - b)p + 2sq^2 - 4rsq + ac^2 + a^2c. \end{aligned}$$

Ta cũng có

$$\begin{aligned} & (a + b + c)XI^2 + abc \\ &= 2s[(p - (s - b))^2 + (q - r)^2] \\ &= 2s[p^2 - 2(s - b)p + (s - b)^2 + q^2 - 2qr + r^2] \\ &= 2sp^2 - 4s(s - b)p + 2s(s - b)^2 + 2sq^2 - 4rsq + 2sr^2 + abc. \end{aligned}$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned} & aXA^2 + bXB^2 + cXC^2 - (a + b + c)XI^2 - abc \\ &= ac^2 + a^2c - 2s(s - b)^2 - 2sr^2 - abc \\ &= ac(a + c) - 2s(s - b)^2 - 2(s - a)(s - b)(s - c) - abc \\ &= ac(a + c - b) - 2s(s - b)^2 - 2(s - a)(s - b)(s - c) \\ &= 2ac(s - b) - 2s(s - b)^2 - 2(s - a)(s - b)(s - c) \\ &= 2(s - b)[ac - s(s - b) - 2(s - a)(s - c)]. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, ta tính được $ac - s(s - b) - 2(s - a)(s - c) = -2s^2 + (a + b + c)s = 0$. \square

Bài toán 6. (IMO 2001/1) Cho ABC là một tam giác nhọn với O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Cho P trên đường BC là chân đường cao hạ từ A . Giả sử $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$. Chứng minh rằng $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$.

⁶IMO Short-list 1988

Chứng minh. Bất đẳng thức góc $\angle CAB + \angle COP < 90^\circ$ có thể được viết như $\angle COP < \angle PCO$. Điều này có thể được chỉ ra nếu chúng ta thiết lập bất đẳng thức chiều dài $OP > PC$. Vì phương tích của P ứng với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $OP^2 = R^2 - BP \cdot PC$, trong đó R bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , nó trở thành $R^2 - BP \cdot PC > PC^2$ hay $R^2 > BC \cdot PC$. Chúng ta **euler** bài toán này. Ta dễ thấy $BC = 2R \sin A$ và $PC = 2R \sin B \cos C$. Vì vậy, ta chỉ ra bất đẳng thức $R^2 > 2R \sin A \cdot 2R \sin B \cos C$ hay $\sin A \sin B \cos C < \frac{1}{4}$. Vì $\sin A < 1$, nó đủ để chỉ ra rằng $\sin A \sin B \cos C < \frac{1}{4}$. Cuối cùng, ta sử dụng điều kiện góc $\angle C \geq \angle B + 30^\circ$ để được bất đẳng thức lượng giác

$$\sin B \cos C = \frac{\sin(B+C) - \sin(C-B)}{2} \leq \frac{1 - \sin(C-B)}{2} \leq \frac{1 - \sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{4}.$$

□

Chúng ta kết thúc phần này bằng bất đẳng thức Barrows mạnh hơn Định lý Erdős-Mordell. Chúng ta cần bất đẳng thức lượng giác sau:

Mệnh đề 1.2.1. Cho $x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ là số thực với $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Khi đó,

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(yz \cos \theta_1 + zx \cos \theta_2 + xy \cos \theta_3).$$

Chứng minh. Sử dụng $\theta_3 = \pi - (\theta_1 + \theta_2)$, ta dễ thấy rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz \cos \theta_1 + zx \cos \theta_2 + xy \cos \theta_3) = (z - (x \cos \theta_2 + y \cos \theta_1))^2 + (x \sin \theta_2 - y \sin \theta_1)^2.$$

□

Hệ quả 1.2.1. Cho p, q , và r là các số thực dương. Cho θ_1, θ_2 , và θ_3 là các số thực thỏa mãn $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$. Khi đó, bất đẳng thức sau xảy ra.

$$p \cos \theta_1 + q \cos \theta_2 + r \cos \theta_3 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{qr}{p} + \frac{rp}{q} + \frac{pq}{r} \right).$$

Chứng minh. Lấy $(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{qr}{p}}, \sqrt{\frac{rp}{q}}, \sqrt{\frac{pq}{r}} \right)$ và áp dụng mệnh đề trên. □

Định lý 1.2.2. (Bất đẳng thức Barrow) Cho P là một điểm bên trong tam giác ABC và cho U, V, W là các giao điểm của phân giác các góc BPC, CPA, APB với các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng $PA + PB + PC \geq 2(PU + PV + PW)$.

Chứng minh. ([MB] và [AK]) Cho $d_1 = PA, d_2 = PB, d_3 = PC, l_1 = PU, l_2 = PV, l_3 = PW, 2\theta_1 = \angle BPC, 2\theta_2 = \angle CPA$, và $2\theta_3 = \angle APB$. Ta cần chứng minh rằng $d_1 + d_2 + d_3 \geq 2(l_1 + l_2 + l_3)$. Ta dễ dẫn ra đẳng thức sau

$$l_1 = \frac{2d_2d_3}{d_2 + d_3} \cos \theta_1, \quad l_2 = \frac{2d_3d_1}{d_3 + d_1} \cos \theta_2, \quad \text{và} \quad l_3 = \frac{2d_1d_2}{d_1 + d_2} \cos \theta_3,$$

Bằng bất đẳng thức AM-GM và hệ quả ở trên, điều này có nghĩa là

$$l_1 + l_2 + l_3 \leq \sqrt{d_2d_3} \cos \theta_1 + \sqrt{d_3d_1} \cos \theta_2 + \sqrt{d_1d_2} \cos \theta_3 \leq \frac{1}{2} (d_1 + d_2 + d_3).$$

□

Như là một áp dụng khác của mệnh đề lượng giác trên, ta thiết lập bất đẳng thức sau

Hệ quả 1.2.2. ([AK], **Abi-Khuzam**) Cho x_1, \dots, x_4 là các số dương. Cho $\theta_1, \dots, \theta_4$ là các số thực sao cho $\theta_1 + \dots + \theta_4 = \pi$. Khi đó,

$$x_1 \cos \theta_1 + x_2 \cos \theta_2 + x_3 \cos \theta_3 + x_4 \cos \theta_4 \leq \sqrt{\frac{(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)}{x_1 x_2 x_3 x_4}}.$$

Chứng minh. Cho $p = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2x_1 x_2} + \frac{x_3^2 + x_4^2}{2x_3 x_4}$ $q = \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{2}$ và $\lambda = \sqrt{\frac{p}{q}}$. Trong $\theta_1 + \theta_2 + (\theta_3 + \theta_4) = \pi$ và $\theta_3 + \theta_4 + (\theta_1 + \theta_2) = \pi$, mệnh đề ám chỉ rằng

$$x_1 \cos \theta_1 + x_2 \cos \theta_2 + \lambda \cos(\theta_3 + \theta_4) \leq p\lambda = \sqrt{pq},$$

và

$$x_3 \cos \theta_3 + x_4 \cos \theta_4 + \lambda \cos(\theta_1 + \theta_2) \leq \frac{q}{\lambda} = \sqrt{pq}.$$

Vì $\cos(\theta_3 + \theta_4) + \cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$, cộng hai bất đẳng thức trên ta được

$$x_1 \cos \theta_1 + x_2 \cos \theta_2 + x_3 \cos \theta_3 + x_4 \cos \theta_4 \leq 2\sqrt{pq} = \sqrt{\frac{(x_1 x_2 + x_3 x_4)(x_1 x_3 + x_2 x_4)(x_1 x_4 + x_2 x_3)}{x_1 x_2 x_3 x_4}}.$$

□

1.3 Các ứng dụng của Số Phức

Trong phần này, chúng ta thảo luận vài ứng dụng của số phức trong bất đẳng thức hình học. Mỗi số phức tương ứng với một điểm duy nhất trên mặt phẳng phức. Ký hiệu chuẩn cho tập các số phức là \mathbb{C} , và chúng ta cũng xem mặt phẳng phức là \mathbb{C} . Công cụ chính là các áp dụng của bất đẳng thức cơ bản sau.

Định lý 1.3.1. Nếu $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, thì $|z_1| + \dots + |z_n| \geq |z_1 + \dots + z_n|$.

Chứng minh. Quy nạp theo n . □

Định lý 1.3.2. (Bất đẳng thức Ptolemy) Cho bất kỳ các điểm A, B, C, D trong mặt phẳng, ta có

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Chứng minh. Cho a, b, c và 0 là các số phức tương ứng với A, B, C, D trong mặt phẳng phức. Nó trở thành

$$|a - b| \cdot |c| + |b - c| \cdot |a| \geq |a - c| \cdot |b|.$$

Áp dụng bất đẳng thức tam giác tới đẳng thức $(a - b)c + (b - c)a = (a - c)b$, ta được kết quả. □

Bài toán 7. ([TD]) Cho P là một điểm tự do trong mặt phẳng của tam giác ABC với trọng tâm G . Chứng minh bất đẳng thức sau

$$(1) \overline{BC} \cdot \overline{PB} \cdot \overline{PC} + \overline{AB} \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{CA} \cdot \overline{PC} \cdot \overline{PA} \geq \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \text{ và}$$

$$(2) \overline{PA}^3 \cdot \overline{BC} + \overline{PB}^3 \cdot \overline{CA} + \overline{PC}^3 \cdot \overline{AB} \geq 3\overline{PG} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB}.$$

Giải. Ta chỉ kiểm tra bất đẳng thức đầu tiên. Chú ý A, B, C, P là các số phức và giả sử rằng P tương ứng với 0 . Ta cần chứng minh rằng

$$|(B - C)BC| + |(A - B)AB| + |(C - A)CA| \geq |(B - C)(C - A)(A - B)|.$$

Ta vẫn áp dụng bất đẳng thức tam giác tới đẳng thức

$$(B - C)BC + (A - B)AB + (C - A)CA = -(B - C)(C - A)(A - B).$$

□

Bài toán 8. (IMO Short-list 2002) Cho ABC là một tam giác có một điểm trong F sao cho $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. Cho các đường BF và CF gặp các cạnh AC và AB tại D và E , tương ứng. Chứng minh rằng $\overline{AB} + \overline{AC} \geq 4\overline{DE}$.

Giải. Cho $\overline{AF} = x, \overline{BF} = y, \overline{CF} = z$ và cho $\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$. Ta có thể xét các hình trên \mathbb{C} sao cho các điểm F, A, B, C, D , và E được đại diện bằng các số phức $0, x, y\omega, z\omega^2, d$, và e . Ta dễ thiết lập được rằng $\overline{DF} = \frac{xz}{x+z}$ và $\overline{EF} = \frac{xy}{x+y}$. Điều này có nghĩa là $d = -\frac{xz}{x+z}\omega$ và $e = -\frac{xy}{x+y}\omega$. Bây giờ chúng ta chứng tỏ rằng

$$|x - y\omega| + |z\omega^2 - x| \geq 4 \left| \frac{-zx}{z+x}\omega + \frac{xy}{x+y}\omega^2 \right|.$$

Vì $|\omega| = 1$ và $\omega^3 = 1$, ta có $|z\omega^2 - x| = |\omega(z\omega^2 - x)| = |z - x\omega|$. Vì thế chúng ta cần chứng minh

$$|x - y\omega| + |z - x\omega| \geq \left| \frac{4zx}{z+x} - \frac{4xy}{x+y}\omega \right|.$$

Mạnh hơn, ta lập $|(x - y\omega) + (z - x\omega)| \geq \left| \frac{4zx}{z+x} - \frac{4xy}{x+y}\omega \right|$ hay $|p - q\omega| \geq |r - s\omega|$, trong đó $p = z + x$, $q = y + x$, $r = \frac{4zx}{z+x}$ và $s = \frac{4xy}{x+y}$. Rõ ràng là $p \geq r > 0$ và $q \geq s > 0$. Suy ra rằng

$$|p - q\omega|^2 - |r - s\omega|^2 = (p - q\omega)\overline{(p - q\omega)} - (r - s\omega)\overline{(r - s\omega)} = (p^2 - r^2) + (pq - rs) + (q^2 - s^2) \geq 0.$$

Ta dễ kiểm tra rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ là tam giác đều. \square

CHƯƠNG 2

BỐN CÁCH CHỨNG MINH CƠ BẢN

Rời rạc hóa ra! Shiing-shen Chern

2.1 Phép thay thế lượng giác

Nếu bạn đối mặt với tích phân có các căn thức bậc hai như

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx, \quad \int \sqrt{1+y^2} \, dy, \quad \int \sqrt{z^2-1} \, dz$$

thì phép thay thế lượng giác như $x = \sin t$, $y = \tan t$, $z = \sec t$ rất hay sử dụng. Ta sẽ học các phép thay thế *lượng giác* phù hợp làm đơn giản bất đẳng thức đã cho.

Bài toán 9. (APMO 2004/5) *Chứng minh rằng, với mọi số thực dương a, b, c ,*

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Cách giải 1. Chọn $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$ với $a = \sqrt{2} \tan A$, $b = \sqrt{2} \tan B$, và $c = \sqrt{2} \tan C$. Sử dụng đẳng thức lượng giác quen thuộc $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, ta có thể viết lại nó như sau

$$\frac{4}{9} \geq \cos A \cos B \cos C (\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C).$$

Ta dễ dàng thấy

$$\cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C.$$

Khi đó, bất đẳng thức lượng giác trên có dạng

$$\frac{4}{9} \geq \cos A \cos B \cos C (\cos A \cos B \cos C - \cos(A + B + C)).$$

Cho $\theta = \frac{A+B+C}{3}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Jensen, ta có

$$\cos A \cos B \cos C \leq \left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \right)^3 \leq \cos^3 \theta.$$

Ta cần chứng tỏ rằng

$$\frac{4}{9} \geq \cos^3 \theta (\cos^3 \theta - \cos 3\theta).$$

Sử dụng đẳng thức lượng giác

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \text{ hay } \cos^3 \theta - \cos 3\theta = 3 \cos \theta - 3 \cos^3 \theta,$$

trở thành

$$\frac{4}{27} \geq \cos^4 \theta (1 - \cos^2 \theta),$$

từ bất đẳng thức AM-GM suy ra

$$\left(\frac{\cos^2 \theta}{2} \cdot \frac{\cos^2 \theta}{2} \cdot (1 - \cos^2 \theta) \right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{\cos^2 \theta}{2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} + (1 - \cos^2 \theta) \right) = \frac{1}{3}.$$

Ta thấy rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\tan A = \tan B = \tan C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nếu và chỉ nếu $a = b = c = 1$. \square

Bài toán 10. (Latvia 2002) Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Chứng minh rằng $abcd \geq 3$.

Cách giải 1. Ta có thể viết lại $a^2 = \tan A, b^2 = \tan B, c^2 = \tan C, d^2 = \tan D$, trong đó $A, B, C, D \in (0, \frac{\pi}{2})$. Khi đó, đẳng thức đại số trở thành đẳng thức lượng giác:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C + \cos^2 D \geq 3 (\cos B \cos C \cos D)^{\frac{2}{3}}.$$

Tương tự, ta được

$$\sin^2 B \geq 3 (\cos C \cos D \cos A)^{\frac{2}{3}}, \sin^2 C \geq 3 (\cos D \cos A \cos B)^{\frac{2}{3}}, \text{ và } \sin^2 D \geq 3 (\cos A \cos B \cos C)^{\frac{2}{3}}.$$

Nhân từng vế ta suy ra được kết quả! \square

Bài toán 11. (Korea 1998) Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $x + y + z = xyz$.

Chứng tỏ rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Vì hàm f không lõm trên \mathbb{R}^+ , ta không thể áp dụng bất đẳng thức Jensen đối với hàm $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Tuy nhiên, hàm $f(\tan \theta)$ lõm trên $(0, \frac{\pi}{2})$!

Cách giải 1. Ta có thể viết $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$, trong đó $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$. Sử dụng $1 + \tan^2 \theta = (\frac{1}{\cos \theta})^2$, ta viết lại nó dưới dạng của A, B, C :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Suy ra từ $\tan(\pi - C) = -z = \frac{x+y}{1-xy} = \tan(A+B)$ và từ $\pi - C, A+B \in (0, \pi)$ mà $\pi - C = A+B$ hay $A+B+C = \pi$. Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh sau đây. \square

Định lý 2.1.1. Cho bất kỳ tam giác nhọn ABC nào, ta có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Chứng minh. Vì $\cos x$ là lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$, ta suy ra trực tiếp từ bất đẳng thức Jensen. \square

Chúng ta chú ý rằng hàm $\cos x$ không lõm trên $(0, \pi)$. Thật ra, nó lõm trên $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Ta có thể nghĩ ngay đến bất đẳng thức $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ không xảy trong bất kỳ tam giác nào. Tuy nhiên, ta biết rằng điều đó lại xảy ra với mọi tam giác.

Định lý 2.1.2. Trong bất kỳ tam giác ABC , ta có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Chứng minh 1. Từ $\pi - C = A + B$ suy ra $\cos C = -\cos(A + B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B$ hay

$$3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) = (\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B - 1)^2 \geq 0.$$

\square

Chứng minh 2. Cho $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Sử dụng định lý Cosin, ta viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng của a , b , c :

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2}.$$

Loại mẫu, ta được

$$3abc \geq a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2),$$

tương đương với $abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$ theo định lý 2. \square

Trong chương trước, ta thấy rằng bất đẳng thức *hình học* $R \geq 2r$ tương đương với bất đẳng thức *đại số* $abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$. Bây giờ ta thấy rằng, trong chứng minh định lý trên, $abc \geq (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$ tương đương với bất đẳng thức *lượng giác* $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. Một ai đó hỏi rằng

Trong tam giác ABC , tồn tại một quan hệ *tự nhiên* giữa $\cos A + \cos B + \cos C$ và $\frac{R}{r}$, trong đó R và r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC ?

Định lý 2.1.3. Cho R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC . Khi đó, ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

Chứng minh. Sử dụng đẳng thức $a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2abc + (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$. Phần còn lại dành cho đọc giả. \square

Bài tập 4. (a) Cho p, q, r là các số thực dương sao cho $p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$. Chứng tỏ rằng, tồn tại một tam giác nhọn ABC sao cho $p = \cos A$, $q = \cos B$, $r = \cos C$.

(b) Cho $p, q, r \geq 0$ với $p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$. Chứng tỏ rằng, tồn tại $A, B, C \in [0, \frac{\pi}{2}]$ với $p = \cos A$, $q = \cos B$, $r = \cos C$, và $A + B + C = \pi$.

Bài toán 12. (USA 2001) Cho a, b , và c là các số thực không âm sao cho $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng $0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2$.

Giải. Chú ý rằng $a, b, c > 1$ chỉ ra rằng $a^2 + b^2 + c^2 + abc > 4$. Nếu $a \leq 1$, khi đó ta có $ab + bc + ca - abc \geq (1 - a)bc \geq 0$. Bây giờ chúng ta chứng minh rằng $ab + bc + ca - abc \leq 2$. Cho $a = 2p, b = 2q, c = 2r$, ta được $p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$. Bằng bài tập trên, ta viết lại

$$a = 2 \cos A, b = 2 \cos B, c = 2 \cos C \text{ với } A, B, C \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ với } A + B + C = \pi.$$

Ta cần chứng minh

$$\cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A - 2 \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{2}.$$

Ta có thể giả sử rằng $A \geq \frac{\pi}{3}$ hay $1 - 2 \cos A \geq 0$. Chú ý rằng

$$\begin{aligned} & \cos A \cos B + \cos B \cos C + \cos C \cos A - 2 \cos A \cos B \cos C \\ &= \cos A (\cos B + \cos C) + \cos B \cos C (1 - 2 \cos A). \end{aligned}$$

Ta áp dụng bất đẳng thức Jensen dẫn ra $\cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} - \cos A$. Chú ý rằng $2 \cos B \cos C = \cos(B - C) + \cos(B + C) \leq 1 - \cos A$. Điều này dẫn ra

$$\cos A (\cos B + \cos C) + \cos B \cos C (1 - 2 \cos A) \leq \cos A \left(\frac{3}{2} - \cos A \right) + \left(\frac{1 - \cos A}{2} \right) (1 - 2 \cos A).$$

Tuy nhiên, ta dễ kiểm tra rằng $\cos A \left(\frac{3}{2} - \cos A \right) + \left(\frac{1 - \cos A}{2} \right) (1 - 2 \cos A) = \frac{1}{2}$. □

2.2 Phép thay thế Đại Số

Chúng ta biết rằng nhiều bất đẳng thức trong hình học tam giác có thể được "xử lý" bằng phép thế *Ravi* và phép thế *lượng giác*. Chúng ta có chuyển bất đẳng thức đã cho thành các bất đẳng thức dễ hơn thông qua vài phép thế *đại số*.

Bài toán 13. (IMO 2001/2) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Cách giải 1. Để khử căn bậc hai, ta dùng phép thế sau:

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}}, \quad z = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}}.$$

Rõ ràng, $x, y, z \in (0, 1)$. Mục đích của chúng ta là chứng tỏ rằng $x + y + z \geq 1$. Chúng ta chú ý

$$\frac{a^2}{8bc} = \frac{x^2}{1-x^2}, \quad \frac{b^2}{8ac} = \frac{y^2}{1-y^2}, \quad \frac{c^2}{8ab} = \frac{z^2}{1-z^2} \implies \frac{1}{512} = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) \left(\frac{y^2}{1-y^2}\right) \left(\frac{z^2}{1-z^2}\right).$$

Vì vậy, ta cần chứng tỏ rằng

$$x + y + z \geq 1, \text{ trong đó } 0 < x, y, z < 1 \text{ và } (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = 512(xyz)^2.$$

Tuy nhiên, $1 > x + y + z$ suy ra rằng, bằng bất đẳng thức AM-GM,

$$(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > ((x+y+z)^2 - x^2)((x+y+z)^2 - y^2)((x+y+z)^2 - z^2) = (x+x+y+z)(y+z)$$

$$(x+y+y+z)(z+x)(x+y+z+z)(x+y) \geq 4(x^2yz)^{\frac{1}{4}} \cdot 2(yz)^{\frac{1}{2}} \cdot 4(y^2zx)^{\frac{1}{4}} \cdot 2(zx)^{\frac{1}{2}} \cdot 4(z^2xy)^{\frac{1}{4}} \cdot 2(xy)^{\frac{1}{2}} \\ = 512(xyz)^2. \text{ Điều này mâu thuẫn!} \quad \square$$

Bài toán 14. (IMO 1995/2) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 1$. Chứng tỏ rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Cách giải 1. Sau khi áp dụng phép thế $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, ta được $xyz = 1$. Bất đẳng thức có dạng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz suy ra rằng

$$[(y+z) + (z+x) + (x+y)] \left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \right) \geq (x+y+z)^2$$

sao cho, bằng bất đẳng thức AM-GM,

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{3}{2}.$$

□

(Korea 1998) Cho x, y, z là các số thực dương với $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

Cách giải 2. Điểm bắt đầu là đặt $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$. Ta thấy rằng $a + b + c = abc$ tương đương với $1 = xy + yz + zx$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}$$

hay

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}} \leq \frac{3}{2}$$

hay

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{3}{2}.$$

Bằng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \frac{x\sqrt{(x+y)(x+z)}}{(x+y)(x+z)} \leq \frac{1}{2} \frac{x[(x+y) + (x+z)]}{(x+y)(x+z)} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+z} + \frac{x}{x+y} \right).$$

Theo cùng cách, ta được

$$\frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{y+x} \right) \quad \text{và} \quad \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+x} + \frac{z}{z+y} \right).$$

Cộng vế theo vế ta được kết quả. □

Bây giờ ta chứng minh một định lý cổ điển theo nhiều cách khác nhau.

Định lý 2.2.1. (Nesbitt, 1903) Cho các số thực dương a, b, c , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 1. Sau khi thế $x = b + c$, $y = c + a$, $z = a + b$, ta được

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{y+z-x}{2x} \geq \frac{3}{2} \quad \text{hay} \quad \sum_{\text{cyclic}} \frac{y+z}{x} \geq 6,$$

từ bất đẳng thức AM-GM ta suy ra:

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{y+z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6 \left(\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z} \right)^{\frac{1}{6}} = 6.$$

Chứng minh 2. Ta dùng phép thế

$$x = \frac{a}{b+c}, y = \frac{b}{c+a}, z = \frac{c}{a+b}.$$

để thấy rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} f(x) = \sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{a+b+c} = 1, \text{ trong đó } f(t) = \frac{t}{1+t}.$$

Vì f là hàm lồi trên $(0, \infty)$, bất đẳng thức Jensen chứng tỏ rằng

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \sum_{\text{cyclic}} f(x) \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \text{ hay } f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f\left(\frac{x+y+z}{3}\right).$$

Vì f tăng đơn điệu, điều này suy ra

$$\frac{1}{2} \leq \frac{x+y+z}{3} \text{ hay } \sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} = x+y+z \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 3. Như trong chứng minh trước, chỉ đủ chứng minh

$$T \geq \frac{1}{2}, \text{ trong đó } T = \frac{x+y+z}{3} \text{ v } \sum_{\text{cyclic}} \frac{x}{1+x} = 1.$$

Ta dễ dàng thấy

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{x}{1+x} = 1$$

suy ra $1 = 2xyz + xy + yz + zx$. Bằng bất đẳng thức, ta có

$$1 = 2xyz + xy + yz + zx \leq 2T^3 + 3T^2 \Rightarrow 2T^3 + 3T^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (2T-1)(T+1)^2 \geq 0 \Rightarrow T \geq \frac{1}{2}.$$

(IMO 2000/2) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc = 1$. Chứng tỏ rằng

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Cách giải 2. ([IV], Ilan Vardi) Vì $abc = 1$, ta có thể chứng minh rằng $a \geq 1 \geq b$.¹ Suy ra

$$1 - \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) = \left(c + \frac{1}{c} - 2\right) \left(a + \frac{1}{b} - 1\right) + \frac{(a-1)(1-b)}{a}. \quad 2$$

□

¹Tại sao? Chú ý rằng bất đẳng thức không đối xứng theo ba biến. Kiểm tra lại xem!

²xem [IV] để kiểm tra lại.

Cách giải 3. Như trong cách giải 1, sau khi thế $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ với $x, y, z > 0$, ta có thể viết lại nó như $xyz \geq (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z)$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $z \geq y \geq x$. Đặt $y - x = p$ và $z - x = q$ với $p, q \geq 0$. Ta thấy rằng

$$xyz - (y + z - x)(z + x - y)(x + y - z) = (p^2 - pq + q^2)x + (p^3 + q^3 - p^2q - pq^2).$$

Vì $p^2 - pq + q^2 \geq (p - q)^2 \geq 0$ và $p^3 + q^3 - p^2q - pq^2 = (p - q)^2(p + q) \geq 0$, Ta có được kết quả. \square

Cách giải 4. (Theo IMO 2000 Short-List) Sử dụng điều kiện $abc = 1$, ta suy ra ngay các đẳng thức

$$2 = \frac{1}{a} \left(a - 1 + \frac{1}{b} \right) + c \left(b - 1 + \frac{1}{c} \right),$$

$$2 = \frac{1}{b} \left(b - 1 + \frac{1}{c} \right) + a \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right),$$

$$2 = \frac{1}{c} \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right) + b \left(a - 1 + \frac{1}{b} \right).$$

Đặc biệt, ít nhất một trong các số $u = a - 1 + \frac{1}{b}$, $v = b - 1 + \frac{1}{c}$, $w = c - 1 + \frac{1}{a}$ là âm. Nếu tồn tại một số như thế, thì ta có

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b} \right) \left(b - 1 + \frac{1}{c} \right) \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right) = uvw < 0 < 1.$$

Và nếu $u, v, w \geq 0$, bất đẳng thức AM-GM cho ta

$$2 = \frac{1}{a}u + cv \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}uv}, \quad 2 = \frac{1}{b}v + aw \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}vw}, \quad 2 = \frac{1}{c}w + au \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}wu}.$$

Vì thế, $uv \leq \frac{a}{c}$, $vw \leq \frac{b}{a}$, $wu \leq \frac{c}{b}$, vì vậy $(uvw)^2 \leq \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = 1$. Vì $u, v, w \geq 0$, ta hoàn tất chứng minh. \square

Bài toán 15. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng tỏ rằng

$$\frac{a}{a + bc} + \frac{b}{b + ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c + ab} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Giải. Ta muốn thiết lập

$$\frac{1}{1 + \frac{bc}{a}} + \frac{1}{1 + \frac{ca}{b}} + \frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{1 + \frac{ab}{c}} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đặt $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}$, $y = \sqrt{\frac{ca}{b}}$, $z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$. Ta cần chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{z}{1 + z^2} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

trong đó $x, y, z > 0$ và $xy + yz + zx = 1$. Thật ra không khó khi chứng tỏ rằng tồn tại $A, B, C \in (0, \pi)$ với

$$x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}, \text{ và } A + B + C = \pi.$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{1 + \left(\tan \frac{A}{2}\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(\tan \frac{B}{2}\right)^2} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \left(\tan \frac{C}{2}\right)^2} \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

hay

$$1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C) \leq 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

hay

$$\cos A + \cos B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

□

Chú ý rằng $\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2}\right) \cos \left(\frac{A-B}{2}\right)$. Vì $\left|\frac{A-B}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$, điều này có nghĩa là

$$\cos A + \cos B \leq 2 \cos \left(\frac{A+B}{2}\right) = 2 \cos \left(\frac{\pi - C}{2}\right).$$

Ta chứng tỏ

$$2 \cos \left(\frac{\pi - C}{2}\right) + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

trong đó $C \in (0, \pi)$. Đây là bất đẳng thức một biến.³ Phần còn lại dành cho đọc giả.

Ở đây, ta cho cách giải khác của bài toán 10.

(Latvia 2002) Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho

$$\frac{1}{1+a^4} + \frac{1}{1+b^4} + \frac{1}{1+c^4} + \frac{1}{1+d^4} = 1.$$

Chứng minh rằng $abcd \geq 3$.

Cách giải 2. (từ Jeong Soo Sim tại kỳ thi KMO 2007) Ta cần chứng minh bất đẳng thức $a^4 b^4 c^4 d^4 \geq 81$. Sau khi dùng phép thế

$$A = \frac{1}{1+a^4}, B = \frac{1}{1+b^4}, C = \frac{1}{1+c^4}, D = \frac{1}{1+d^4},$$

ta được

$$a^4 = \frac{1-A}{A}, b^4 = \frac{1-B}{B}, c^4 = \frac{1-C}{C}, d^4 = \frac{1-D}{D}.$$

³ *Tách nó ra!* Shiing-shen Chern

Khi đó ràng buộc trở thành $A + B + C + D = 1$ và bất đẳng thức có thể được viết lại như

$$\frac{1-A}{A} \cdot \frac{1-B}{B} \cdot \frac{1-C}{C} \cdot \frac{1-D}{D} \geq 81.$$

hay

$$\frac{B+C+D}{A} \cdot \frac{C+D+A}{B} \cdot \frac{D+A+B}{C} \cdot \frac{A+B+C}{D} \geq 81.$$

hay

$$(B+C+D)(C+D+A)(D+A+B)(A+B+C) \geq 81ABCD.$$

Tuy nhiên, đây là kết quả từ bất đẳng thức AM-GM:

$$(B+C+D)(C+D+A)(D+A+B)(A+B+C) \geq 3(BCD)^{\frac{1}{3}} \cdot 3(CDA)^{\frac{1}{3}} \cdot 3(DAB)^{\frac{1}{3}} \cdot 3(ABC)^{\frac{1}{3}}.$$

□

Bài toán 16. (Iran 1998) Chứng minh rằng, với mọi $x, y, z > 1$ sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$,

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Cách giải 1. Chúng ta dùng phép thế $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{y-1}$, $c = \sqrt{z-1}$. Khi đó, điều kiện trở thành

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} = 2 \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2b^2c^2 = 1$$

và bất đẳng thức tương đương

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 3} \geq a + b + c \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq \frac{3}{2}.$$

Cho $p = bc$, $q = ca$, $r = ab$. Công việc của chúng ta là chứng minh rằng $p + q + r \leq \frac{3}{2}$ trong đó $p^2 + q^2 + r^2 + 2pqr = 1$. Theo bài tập 7, ta có thể dùng phép thế lượng giác

$$p = \cos A, q = \cos B, r = \cos C \text{ một trong các } A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ with } A + B + C = \pi.$$

Ta chỉ cần chứng minh $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$. Nó được suy ra từ bất đẳng thức Jensen. □

Bài toán 17. (Belarus 1998) Chứng minh rằng, với mọi $a, b, c > 0$,

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + 1.$$

Giải. Sau khi viết $x = \frac{a}{b}$ và $y = \frac{c}{b}$, ta được

$$\frac{c}{a} = \frac{y}{x}, \quad \frac{a+b}{b+c} = \frac{x+1}{1+y}, \quad \frac{b+c}{c+a} = \frac{1+y}{y+x}.$$

Ta có thể viết lại bất đẳng thức như

$$x^3y^2 + x^2 + x + y^3 + y^2 \geq x^2y + 2xy + 2xy^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{x^3y^2 + x}{2} \geq x^2y, \quad \frac{x^3y^2 + x + y^3 + y^3}{2} \geq 2xy^2, \quad x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta được kết quả. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$ hay $a = b = c$. \square

Bài toán 18. (IMO Short-list 2001) Cho x_1, \dots, x_n là các số thực tùy ý. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Cách giải 1. Ta chỉ xét trường hợp khi x_1, \dots, x_n là các số thực không âm. (Tại sao nhỉ?)⁴ Cho $x_0 = 1$. Áp dụng phép thế $y_i = x_0^2 + \dots + x_i^2$ với mọi $i = 0, \dots, n$, ta được $x_i = \sqrt{y_i - y_{i-1}}$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sum_{i=0}^n \frac{\sqrt{y_i - y_{i-1}}}{y_i} < \sqrt{n}.$$

Vì $y_i \geq y_{i-1}$ với mọi $i = 1, \dots, n$, Ta có một cận trên về trái:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\sqrt{y_i - y_{i-1}}}{y_i} \leq \sum_{i=0}^n \frac{\sqrt{y_i - y_{i-1}}}{\sqrt{y_i y_{i-1}}} = \sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{1}{y_{i-1}} - \frac{1}{y_i}}$$

Bây giờ, ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để có cận trên của biểu thức còn lại:

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{1}{y_{i-1}} - \frac{1}{y_i}} \leq \sqrt{n \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{y_{i-1}} - \frac{1}{y_i} \right)} = \sqrt{n \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y_n} \right)}.$$

Vì $y_0 = 1$ và $y_n > 0$, nên ta được cận trên mong muốn là \sqrt{n} . \square

Cách giải 2. Ta có thể giả sử rằng x_1, \dots, x_n là các số thực không âm. Cho $x_0 = 0$. Ta sử dụng phép thay thế đại số sau

$$t_i = \frac{x_i}{\sqrt{x_0^2 + \dots + x_i^2}}, \quad c_i = \frac{1}{\sqrt{1 + t_i^2}} \quad \text{và} \quad s_i = \frac{t_i}{\sqrt{1 + t_i^2}}$$

với mọi $i = 0, \dots, n$. Ta dễ thấy rằng $\frac{x_i}{x_0^2 + \dots + x_i^2} = c_0 \dots c_i s_i$. Vì $s_i = \sqrt{1 - c_i^2}$, bất đẳng thức mong muốn trở thành

$$c_0 c_1 \sqrt{1 - c_1^2} + c_0 c_1 c_2 \sqrt{1 - c_2^2} + \dots + c_0 c_1 \dots c_n \sqrt{1 - c_n^2} < \sqrt{n}.$$

$$^4 \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} \leq \frac{|x_1|}{1+x_1^2} + \frac{|x_2|}{1+x_1^2+x_2^2} + \dots + \frac{|x_n|}{1+x_1^2+\dots+x_n^2}.$$

Vì $0 < c_i \leq 1$ với mọi $i = 1, \dots, n$, ta có

$$\sum_{i=1}^n c_0 \cdots c_i \sqrt{1 - c_i^2} \leq \sum_{i=1}^n c_0 \cdots c_{i-1} \sqrt{1 - c_i^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(c_0 \cdots c_{i-1})^2 - (c_0 \cdots c_{i-1} c_i)^2}.$$

Vì $c_0 = 1$, bằng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(c_0 \cdots c_{i-1})^2 - (c_0 \cdots c_{i-1} c_i)^2} \leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n [(c_0 \cdots c_{i-1})^2 - (c_0 \cdots c_{i-1} c_i)^2]} = \sqrt{n [1 - (c_0 \cdots c_n)^2]}.$$

□

2.3 Định lý hàm tăng

Định lý 2.3.1. (Định lý hàm tăng) Cho $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi. Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, khi đó f đơn điệu trên (a, b) . Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$, khi đó f tăng ngặt trên (a, b) .

Chứng minh. Trước tiên ta xét trường hợp khi $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$. Cho $a < x_1 < x_2 < b$. Ta muốn chứng tỏ rằng $f(x_1) < f(x_2)$. Áp dụng định lý giá trị trung bình, ta có $c \in (x_1, x_2)$ sao cho $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Vì $f'(c) > 0$, phương trình này nghĩa là $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Trong trường hợp khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$, ta có thể áp dụng định lý giá trị trung bình cho ra kết quả. \square

Bài toán 19. (Ireland 2000) Cho $x, y \geq 0$ với $x + y = 2$. Chứng minh rằng $x^2 y^2 (x^2 + y^2) \leq 2$.

Cách giải 1. Sau khi thuần nhất nó, ta cần chứng minh

$$2 \left(\frac{x+y}{2} \right)^6 \geq x^2 y^2 (x^2 + y^2) \quad \text{hay} \quad (x+y)^6 \geq 32 x^2 y^2 (x^2 + y^2).$$

(Bây giờ, hãy quên đi ràng buộc $x + y = 2$!) Trường hợp $xy = 0$, bất đẳng thức xảy ra. Bây giờ ta giả sử rằng $xy \neq 0$. Vì tính thuần nhất của bất đẳng thức, điều này có nghĩa là ta có thể chuẩn hóa $xy = 1$. Khi đó, nó trở thành

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^6 \geq 32 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{hay} \quad p^3 \geq 32(p-2).$$

trong đó $p = \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \geq 4$. Công việc của chúng ta là tối thiểu hóa $F(p) = p^3 - 32(p-2)$ trên $[4, \infty)$. Vì $F'(p) = 3p^2 - 32 \geq 0$, trong đó $p \geq \sqrt{\frac{32}{3}}$, F tăng (đơn điệu) trên $[4, \infty)$. Vì thế, $F(p) \geq F(4) = 0$ với mọi $p \geq 4$. \square

Cách giải 2. Như trong cách giải 1, ta chứng minh rằng $(x+y)^6 \geq 32(x^2+y^2)(xy)^2$ với mọi $x, y \geq 0$. Trong trường hợp $x = y = 0$, quá rõ. Bây giờ, nếu $x^2 + y^2 > 0$, khi đó ta có thể chuẩn hóa $x^2 + y^2 = 2$. Đặt $p = xy$, ta có $0 \leq p \leq \frac{x^2+y^2}{2} = 1$ và $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 2 + 2p$. Bây giờ nó trở thành

$$(2+2p)^3 \geq 64p^2 \quad \text{hay} \quad p^3 - 5p^2 + 3p + 1 \geq 0.$$

Ta muốn tối thiểu $F(p) = p^3 - 5p^2 + 3p + 1$ trên $[0, 1]$. Ta tính $F'(p) = 3(p - \frac{1}{3})(p - 3)$. Ta thấy rằng F tăng đơn điệu trên $[0, \frac{1}{3}]$ và giảm đơn điệu trên $[\frac{1}{3}, 1]$. vì $F(0) = 1$ và $F(1) = 0$, ta kết luận rằng $F(p) \geq F(1) = 0$ với mọi $p \in [0, 1]$. \square

Cách giải 3. Ta chứng tỏ rằng $(x+y)^6 \geq 32(x^2+y^2)(xy)^2$ trong đó $x \geq y \geq 0$. Ta thế $u = x + y$ và $v = x - y$. Khi đó, ta có $u \geq v \geq 0$. Nó trở thành

$$u^6 \geq 32 \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) \left(\frac{u^2 - v^2}{4} \right)^2 \quad \text{hay} \quad u^6 \geq (u^2 + v^2)(u^2 - v^2)^2.$$

Chú ý rằng $u^4 \geq u^4 - v^4 \geq 0$ và $u^2 \geq u^2 - v^2 \geq 0$. So, $u^6 \geq (u^4 - v^4)(u^2 - v^2) = (u^2 + v^2)(u^2 - v^2)^2$. \square

Bài toán 20. (IMO 1984/1) Cho x, y, z là các số thực không âm sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

Cách giải 1. Cho $f(x, y, z) = xy + yz + zx - 2xyz$. Ta có thể giả sử $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Vì $x + y + z = 1$, dẫn đến $x \leq \frac{1}{3}$. Suy ra $f(x, y, z) = (1 - 3x)yz + xyz + zx + xy \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta được $yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$. Vì $1 - 2x \geq 0$, suy ra

$$f(x, y, z) = x(y + z) + yz(1 - 2x) \leq x(1 - x) + \left(\frac{1 - x}{2}\right)^2 (1 - 2x) = \frac{-2x^3 + x^2 + 1}{4}.$$

Công việc của chúng ta là tìm giá trị cực đại hàm một biến $F(x) = \frac{1}{4}(-2x^3 + x^2 + 1)$, trong đó $x \in [0, \frac{1}{3}]$. Vì $F'(x) = \frac{3}{2}x(\frac{1}{3} - x) \geq 0$ trên $[0, \frac{1}{3}]$, ta kết luận $F(x) \leq F(\frac{1}{3}) = \frac{7}{27}$ với mọi $x \in [0, \frac{1}{3}]$. \square

(IMO 2000/2) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Cách giải 5. (dựa theo kỳ thi chọn đội tuyển IMO 2000 ở Nhật) Vì $abc = 1$, nên ít nhất một trong các a, b, c lớn hơn hay bằng 1. Ta nói $b \geq 1$. Ta được $c = \frac{1}{ab}$, trở thành

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) (b - 1 + ab) \left(\frac{1}{ab} - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

hay

$$a^3b^3 - a^2b^3 - ab^3 - a^2b^2 + 3ab^2 - ab + b^3 - b^2 - b + 1 \geq 0.$$

Đặt $x = ab$, nó trở thành $f_b(x) \geq 0$, trong đó

$$f_b(t) = t^3 + b^3 - b^2t - bt^2 + 3bt - t^2 - b^2 - t - b + 1.$$

Cố định một số dương $b \geq 1$. Ta cần chứng tỏ rằng $F(t) := f_b(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$. Từ $b \geq 1$ suy ra đa thức bậc ba $F'(t) = 3t^2 - 2(b + 1)t - (b^2 - 3b + 1)$ có hai nghiệm thực

$$\frac{b + 1 - \sqrt{4b^2 - 7b + 4}}{3} \quad \text{và} \quad \lambda = \frac{b + 1 + \sqrt{4b^2 - 7b + 4}}{3}.$$

vì F cực tiểu địa phương tại $t = \lambda$, ta thấy rằng $F(t) \geq \min \{F(0), F(\lambda)\}$ với mọi $t \geq 0$. Ta phải chứng minh rằng $F(0) \geq 0$ và $F(\lambda) \geq 0$. Ta có $F(0) = b^3 - b^2 - b + 1 = (b - 1)^2(b + 1) \geq 0$. Ta còn chỉ ra rằng $F(\lambda) \geq 0$. Chú ý rằng λ là nghiệm của $F'(t)$. Sau khi chia, ta được

$$F(t) = F'(t) \left(\frac{1}{3}t - \frac{b + 1}{9}\right) + \frac{1}{9}((-8b^2 + 14b - 8)t + 8b^3 - 7b^2 - 7b + 8).$$

Đặt $t = \lambda$, ta có

$$F(\lambda) = \frac{1}{9}((-8b^2 + 14b - 8)\lambda + 8b^3 - 7b^2 - 7b + 8).$$

Vì thế, ta đi thiết lập điều đó, với mọi $b \geq 0$,

$$(-8b^2 + 14b - 8) \left(\frac{b + 1 + \sqrt{4b^2 - 7b + 4}}{3} \right) + 8b^3 - 7b^2 - 7b + 8 \geq 0,$$

tương đương

$$16b^3 - 15b^2 - 15b + 16 \geq (8b^2 - 14b + 8)\sqrt{4b^2 - 7b + 4}.$$

Vì cả $16b^3 - 15b^2 - 15b + 16$ và $8b^2 - 14b + 8$ dương,⁵ nó tương đương

$$(16b^3 - 15b^2 - 15b + 16)^2 \geq (8b^2 - 14b + 8)^2(4b^2 - 7b + 4)$$

hay

$$864b^5 - 3375b^4 + 5022b^3 - 3375b^2 + 864b \geq 0 \quad \text{hay} \quad 864b^4 - 3375b^3 + 5022b^2 - 3375b + 864 \geq 0.$$

Cho $G(x) = 864x^4 - 3375x^3 + 5022x^2 - 3375x + 864$. Ta chứng minh rằng $G(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta thấy rằng

$$G'(x) = 3456x^3 - 10125x^2 + 10044x - 3375 = (x - 1)(3456x^2 - 6669x + 3375).$$

Vì $3456x^2 - 6669x + 3375 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta thấy $G(x)$ và $x - 1$ cùng dấu. G giảm đơn điệu trên $(-\infty, 1]$ và tăng đơn điệu trên $[1, \infty)$. Ta kết luận G có cực tiểu tại $x = 1$. Vì thế, $G(x) \geq G(1) = 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. \square

⁵Ta dễ thấy $16b^3 - 15b^2 - 15b + 16 = 16(b^3 - b^2 - b + 1) + b^2 + b > 16(b^2 - 1)(b - 1) \geq 0$ và $8b^2 - 14b + 8 = 8(b - 1)^2 + 2b > 0$.

2.4 Thiết lập cận mới

Trước tiên chúng ta xem hai cách chứng minh bất đẳng thức Nesbitt.

(Nesbitt) Với mọi số dương a, b, c , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 4. Từ $\left(\frac{a}{b+c} - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, ta dẫn ra

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{8a}{b+c} - 1}{\frac{a}{b+c} + 1} = \frac{8a - b - c}{4(a+b+c)}.$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{8a - b - c}{4(a+b+c)} = \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 5. Ta nói rằng

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{3a^{\frac{3}{2}}}{2\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}\right)} \text{ hay } 2\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}\right) \geq 3a^{\frac{1}{2}}(b+c).$$

Bất đẳng thức AM-GM cho $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}}b$ và $a^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}}c$. Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức này ta được $2\left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}\right) \geq 3a^{\frac{1}{2}}(b+c)$, như mong muốn. Vì thế, ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} \sum_{\text{cyclic}} \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2}.$$

Ta có thể chứng minh vài bất đẳng thức hoán vị vòng quanh bằng cách tìm ra cận mới. Giả sử ta muốn thiết lập

$$\sum_{\text{cyclic}} F(x, y, z) \geq C.$$

Nếu hàm G thỏa mãn

- (1) $F(x, y, z) \geq G(x, y, z)$ với mọi $x, y, z > 0$, và
- (2) $\sum_{\text{cyclic}} G(x, y, z) = C$ với mọi $x, y, z > 0$,

khi đó, ta dẫn ra

$$\sum_{\text{cyclic}} F(x, y, z) \geq \sum_{\text{cyclic}} G(x, y, z) = C.$$

Ví dụ, nếu hàm F thỏa mãn

$$F(x, y, z) \geq \frac{x}{x+y+z}$$

với mọi $x, y, z > 0$, khi đó, lấy tổng hoán vị vòng quanh ta được

$$\sum_{\text{cyclic}} F(x, y, z) \geq 1.$$

Như ta thấy ở trên, hai cách chứng minh bất đẳng thức Nesbitt, có nhiều cận dưới.

Bài toán 21. Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Chứng minh. Ta không áp dụng phép thế Ravi. Từ bất đẳng thức tam giác, dẫn ra

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} < \sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = 2.$$

□

Có một lần, tôi cố gắng tìm cận mới của $(x+y+z)^2$ trong đó $x, y, z > 0$. Có cận dưới quen thuộc như $3(xy+yz+zx)$ và $9(xyz)^{\frac{2}{3}}$. Nhưng tôi muốn tìm ra một cái hoàn toàn khác. Tôi đã thử tách biểu thức đối xứng theo ba biến x, y, z . Chú ý rằng

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xy + yz + yz + zx + zx.$$

Tôi áp dụng bất đẳng thức AM-GM vào vế phải ngoại trừ biểu thức x^2 :

$$y^2 + z^2 + xy + xy + yz + yz + zx + zx \geq 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}.$$

Suy ra rằng

$$(x+y+z)^2 \geq x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}} \right).$$

(IMO 2001/2) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Cách giải 2. Ta thấy rằng bất đẳng thức trên cũng cho ta một cận dưới khác $x+y+z$, nghĩa là,

$$x+y+z \geq \sqrt{x^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}} \right)}.$$

Suy ra

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x^{\frac{3}{2}} + 8y^{\frac{3}{4}}z^{\frac{3}{4}}}} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{x}{x+y+z} = 1.$$

Sau khi thế $x = a^{\frac{4}{3}}, y = b^{\frac{4}{3}},$ và $z = c^{\frac{4}{3}},$ khi đó trở thành

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1.$$

□

Bài toán 22. (IMO 2005/3) Cho $x, y,$ và z là các số dương sao cho $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Cách giải 1. Điều cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau

$$\left(\frac{x^2 - x^5}{x^5 + y^2 + z^2} + 1\right) + \left(\frac{y^2 - y^5}{y^5 + z^2 + x^2} + 1\right) + \left(\frac{z^2 - z^5}{z^5 + x^2 + y^2} + 1\right) \leq 3$$

hay

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 3.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và $xyz \geq 1$, ta có

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad \text{hay} \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Lấy tổng hoán vị vòng quanh và $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ cho ta

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3.$$

□

Cách giải 2. Ý tưởng chính như sau:

$$\frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 1 \geq \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^2}{z^5 + x^2 + y^2}.$$

Đầu tiên ta biến đổi về trái. Ta suy ra từ $y^4 + z^4 \geq y^3z + yz^3 = yz(y^2 + z^2)$ được

$$x(y^4 + z^4) \geq xyz(y^2 + z^2) \geq y^2 + z^2 \quad \text{hay} \quad \frac{x^5}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5}{x^5 + xy^4 + xz^4} = \frac{x^4}{x^4 + y^4 + z^4}.$$

Lấy tổng hoán vị vòng quanh, ta có bất đẳng thức mong muốn. Ta còn biến đổi về phải.

[**Cách 1**] Theo cách giải 1, bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và $xyz \geq 1$ chỉ ra

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad \text{hay} \quad \frac{x^2(yz + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \geq \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

Lấy tổng hoán vị vòng quanh, ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{x^2(yz + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

Công việc của chúng ta là thiết lập bất đẳng thức thuần nhất sau

$$1 \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{x^2(yz + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq 2 \sum_{\text{cyclic}} x^2y^2 + \sum_{\text{cyclic}} x^2yz \Leftrightarrow \sum_{\text{cyclic}} x^4 \geq \sum_{\text{cyclic}} x^2yz.$$

Tuy nhiên, từ bất đẳng thức AM-GM, ta được

$$\sum_{\text{cyclic}} x^4 = \sum_{\text{cyclic}} \frac{x^4 + y^4}{2} \geq \sum_{\text{cyclic}} x^2y^2 = \sum_{\text{cyclic}} x^2 \left(\frac{y^2 + z^2}{2} \right) \geq \sum_{\text{cyclic}} x^2yz.$$

[Cách 2] Ta có

$$\frac{2x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2 + 4x^2z^2}{4(x^2 + y^2 + z^2)^2} \geq \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

Ta đi chứng minh

$$\frac{2x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2 + 4x^2z^2}{4(x^2 + y^2 + z^2)^2} \geq \frac{x^2yz}{x^4 + y^3z + yz^3}$$

vì $xyz \geq 1$ chỉ ra rằng

$$\frac{x^2yz}{x^4 + y^3z + yz^3} = \frac{x^2}{\frac{x^5}{xyz} + y^2 + z^2} \geq \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

Vì vậy, ta cần chỉ ra bất đẳng thức thuần nhất

$$(2x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2 + 4x^2z^2)(x^4 + y^3z + yz^3) \geq 4x^2yz(x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Tuy nhiên, đây là hệ quả suy ra từ bất đẳng thức AM-GM.

$$\begin{aligned} & (2x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2 + 4x^2z^2)(x^4 + y^3z + yz^3) - 4x^2yz(x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ &= (x^8 + x^4y^4 + x^6y^2 + x^6y^2 + y^7z + y^3z^5) + (x^8 + x^4z^4 + x^6z^2 + x^6z^2 + yz^7 + y^5z^3) \\ & \quad + 2(x^6y^2 + x^6z^2) - 6x^4y^3z - 6x^4yz^3 - 2x^6yz \\ &\geq 6\sqrt[6]{x^8 \cdot x^4y^4 \cdot x^6y^2 \cdot x^6y^2 \cdot y^7z \cdot y^3z^5} + 6\sqrt[6]{x^8 \cdot x^4z^4 \cdot x^6z^2 \cdot x^6z^2 \cdot yz^7 \cdot y^5z^3} \\ & \quad + 2\sqrt{x^6y^2 \cdot x^6z^2} - 6x^4y^3z - 6x^4yz^3 - 2x^6yz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lấy tổng hoán vị vòng quanh, ta được

$$1 = \sum_{\text{cyclic}} \frac{2x^4 + y^4 + z^4 + 4x^2y^2 + 4x^2z^2}{4(x^2 + y^2 + z^2)^2} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{x^2}{x^5 + y^2 + z^2}.$$

□

Cách giải 3. (theo thí sinh Iurie Boreico⁶ trong kỳ thi IMO 2005 ở Moldova) Ta lập

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Nó suy ra từ đồng nhất thức

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} - \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{(x^3 - 1)^2 x^2 (y^2 + z^2)}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)(x^5 + y^2 + z^2)}.$$

Lấy tổng hoán vị vòng quanh và sử dụng $xyz \geq 1$, ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} \sum_{\text{cyclic}} \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) \geq \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} \sum_{\text{cyclic}} (x^2 - yz) \geq 0.$$

□

⁶Người nhận giải đặc biệt cho bài giải này.

Đây là cách giải rất thông minh của bài toán

Bài toán 23. (KMO cuối tuần 2007) Chứng minh rằng, với mọi $a, b, c, x, y, z > 0$,

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \leq \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}.$$

Giải. (theo Sanghoon) Ta cần bổ đề sau:

Lemma. Với mọi $p, q, \omega_1, \omega_2 > 0$, ta có

$$\frac{pq}{p+q} \leq \frac{\omega_1^2 p + \omega_2^2 q}{(\omega_1 + \omega_2)^2}.$$

Chứng minh bổ đề. Nó tương đương

$$(p+q)(\omega_1^2 p + \omega_2^2 q) - (\omega_1 + \omega_2)^2 pq \geq 0$$

hay

$$(\omega_1 p - \omega_2 q)^2 \geq 0.$$

Lấy $(p, q, \omega_1, \omega_2) = (a, x, x+y+z, a+b+c)$ trong bổ đề, ta được

$$\frac{ax}{a+x} \leq \frac{(x+y+z)^2 a + (a+b+c)^2 x}{(x+y+z+a+b+c)^2}.$$

Tương tự, ta được

$$\frac{by}{b+y} \leq \frac{(x+y+z)^2 b + (a+b+c)^2 y}{(x+y+z+a+b+c)^2}$$

và

$$\frac{cz}{c+z} \leq \frac{(x+y+z)^2 c + (a+b+c)^2 z}{(x+y+z+a+b+c)^2}.$$

Cộng vế theo vế, ta được

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \leq \frac{(x+y+z)^2(a+b+c) + (a+b+c)^2(x+y+z)}{(x+y+z+a+b+c)^2}.$$

hay

$$\frac{ax}{a+x} + \frac{by}{b+y} + \frac{cz}{c+z} \leq \frac{(a+b+c)(x+y+z)}{a+b+c+x+y+z}.$$

□

Bài tập 5. (USAMO Mùa Hè 2002) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3.$$

(Hint. [TJM]) Thiết lập bất đẳng thức $\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} \geq 3\left(\frac{a}{a+b+c}\right)$.

Bài tập 6. (APMO 2005) ($abc = 8, a, b, c > 0$)

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

(Hint.) Sử dụng bất đẳng thức $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \geq \frac{2}{2+x^2}$ cho ta cận dưới của vế trái.

CHƯƠNG 3

THUẦN NHẤT HÓA VÀ CHUẨN HÓA

Nhà toán học nào cũng chỉ có vài mẹo nhỏ mà thôi. Trước kia, một nhà lý thuyết số nổi tiếng lão làng đã có một số nhận xét chê bai các tác phẩm của Paul Erdős. Các bạn ngưỡng mộ các tác phẩm và công trình của Erdős cố gắng hiến cho Toán học như chính tôi cũng làm như vậy, và tôi cảm thấy thật bức mình khi chính nhà toán học lão làng phát biểu phủ phàng các công trình của Erdős đã làm "giảm" đi các chứng minh của ông ấy chỉ dựa trên các mẹo nhỏ. Nhà lý thuyết số nào mà không nhận ra rằng các nhà toán học khác, thậm chí là nhà toán học giỏi nhất, cũng có thể chỉ có vài mẹo nhỏ họ sử dụng mãi mãi. Chẳng hạn như Hilbert. Tập hai của bài sưu tầm các bài báo của Hilbert có các bài báo của Hilbert về lý thuyết bất biến. Tôi đã đọc các bài báo này kỹ. Thật buồn, khi ai đó nói rằng một số kết quả mỹ mãn của Hilbert đã bị lãng quên hoàn toàn. Nhưng khi đọc các chứng minh hay và sâu của Hilbert về lý thuyết bất biến, thật ngạc nhiên ta thấy Hilbert cũng chỉ sử dụng chung các mẹo nhỏ ấy. **Ngay cả Hilbert cũng chỉ có vài mẹo nhỏ mà thôi!** Gian-Carlo Rota, *Ten Lessons I Wish I Had Been Taught* - Mười bài học tôi mong muốn được học, Notices of the AMS, January 1997

3.1 Thuần nhất hóa

Nhiều bài toán bất đẳng thức thường có các ràng buộc như $ab = 1$, $xyz = 1$, $x + y + z = 1$. Một bất đẳng thức *đối xứng* không thuần nhất có thể được chuyển thành một bất đẳng thức thuần nhất. Khi đó, ta áp dụng hai định lý hay: bất đẳng thức Shur và bất đẳng thức Muirhead. Ta bắt đầu với một ví dụ đơn giản.

Bài toán 24. (Hungary 1996) Cho a, b là các số thực dương với $a + b = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+1} + \frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}.$$

Giải. Sử dụng điều kiện $a + b = 1$, ta có thể dẫn từ bất đẳng thức đã cho thành bất đẳng thức thuần nhất, nghĩa là

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{(a+b)(a+(a+b))} + \frac{b^2}{(a+b)(b+(a+b))} \text{ hay } a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3,$$

suy ra từ $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a-b)^2(a+b) \geq 0$. Bất đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $a = b = \frac{1}{2}$. \square

Bất đẳng thức trên $a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3$ có thể tổng quát hóa như sau:

Định lý 3.1.1. Cho a_1, a_2, b_1, b_2 là các số dương sao cho $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ và $\max(a_1, a_2) \geq \max(b_1, b_2)$. Cho x và y là các số không âm. Khi đó, ta có $x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} \geq x^{b_1}y^{b_2} + x^{b_2}y^{b_1}$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $a_1 \geq a_2, b_1 \geq b_2, a_1 \geq b_1$. Nếu $x = 0$ hay $y = 0$, rõ ràng bất đẳng thức xảy ra. Vì vậy, ta giả sử $x, y > 0$. Ta suy ra $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$ mà $a_1 - a_2 = (b_1 - a_2) + (b_2 - a_2)$. Ta dễ thấy

$$\begin{aligned} x^{a_1}y^{a_2} + x^{a_2}y^{a_1} - x^{b_1}y^{b_2} - x^{b_2}y^{b_1} &= x^{a_2}y^{a_2} (x^{a_1-a_2} + y^{a_1-a_2} - x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2} - x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2}) \\ &= x^{a_2}y^{a_2} (x^{b_1-a_2} - y^{b_1-a_2}) (x^{b_2-a_2} - y^{b_2-a_2}) \\ &= \frac{1}{x^{a_2}y^{a_2}} (x^{b_1} - y^{b_1}) (x^{b_2} - y^{b_2}) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Ghi chú 3.1.1. Khi nào dấu bất đẳng thức xảy ra trong định lý 8?

Bây giờ ta đưa ra hai ký hiệu tổng \sum_{cyclic} và \sum_{sym} . Cho $P(x, y, z)$ là một hàm của ba biến x, y, z . Ta định nghĩa:

$$\sum_{\text{cyclic}} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y),$$

$$\sum_{\text{sym}} P(x, y, z) = P(x, y, z) + P(x, z, y) + P(y, x, z) + P(y, z, x) + P(z, x, y) + P(z, y, x).$$

Ví dụ, ta biết rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} x^3y = x^3y + y^3z + z^3x, \quad \sum_{\text{sym}} x^3 = 2(x^3 + y^3 + z^3)$$

$$\sum_{\text{sym}} x^2y = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y, \quad \sum_{\text{sym}} xyz = 6xyz.$$

Bài toán 25. (IMO 1984/1) Cho x, y, z là các số không âm sao cho $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$.

Cách giải 2. Sử dụng điều kiện $x + y + z = 1$, ta dẫn bất đẳng thức đã cho thành bất đẳng thức thuần nhất, nghĩa là

$$0 \leq (xy + yz + zx)(x + y + z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x + y + z)^3.$$

Bất đẳng thức về trái tầm thường, vì nó tương đương

$$0 \leq xyz + \sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Rút gọn về phải thành

$$7 \sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{\text{sym}} x^2y \geq 0.$$

Ta xem

$$7 \sum_{\text{cyclic}} x^3 + 15xyz - 6 \sum_{\text{sym}} x^2y = \left(2 \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \right) + 5 \left(3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y \right),$$

ta chỉ cần chứng minh

$$2 \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y \quad \text{và} \quad 3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Ta chú ý rằng

$$2 \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y = \sum_{\text{cyclic}} (x^3 + y^3) - \sum_{\text{cyclic}} (x^2y + xy^2) = \sum_{\text{cyclic}} (x^3 + y^3 - x^2y - xy^2) \geq 0.$$

Bất đẳng thức thứ nhì được viết lại

$$\sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z) \geq 0,$$

là trường hợp đặc biệt của định lý Schur trong phần kế tiếp ta sẽ đề cập. □

Sau khi thuần nhất hóa, đôi lúc ta có thể tìm các tiếp cận *đúng*, hãy xem:

(Iran 1998) Chứng minh rằng, với mọi $x, y, z > 1$ sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$,

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Cách giải 2. Sau phép thế đại số $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$, $c = \frac{1}{z}$, ta cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq \sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}},$$

trong đó $a, b, c \in (0, 1)$ và $a + b + c = 2$. Sử dụng ràng buộc $a + b + c = 2$, ta được bất đẳng thức thuần nhất

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \geq \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2} - a}{a}} + \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2} - b}{b}} + \sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2} - c}{c}}$$

hay

$$\sqrt{(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \geq \sqrt{\frac{b+c-a}{a}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c}},$$

dẫn ra trực tiếp từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$\sqrt{[(b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c)] \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} \geq \sqrt{\frac{b+c-a}{a}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c}}.$$

□

3.2 Bất đẳng thức Schur và Định lý Muirhead

Định lý 3.2.1. (Schur) Cho x, y, z là các số thực không âm. Bất kỳ $r > 0$, ta có

$$\sum_{\text{cyclic}} x^r(x-y)(x-z) \geq 0.$$

Chứng minh. Vì bất đẳng thức đối xứng theo ba biến. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó bất đẳng thức đã cho được viết lại là

$$(x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0,$$

và mọi hạng tử ở vế trái không âm. □

Ghi chú 3.2.1. Khi nào đẳng thức xảy ra vậy?

Bài tập 7. Bác bỏ mệnh đề sau: Với mọi $a, b, c, d \geq 0$ và $r > 0$, ta có

$$a^r(a-b)(a-c)(a-d) + b^r(b-c)(b-d)(b-a) + c^r(c-a)(c-b)(c-d) + d^r(d-a)(d-b)(d-c) \geq 0.$$

Trường hợp đặc biệt sau của bất đẳng thức Schur hay sử dụng:

$$\sum_{\text{cyclic}} x(x-y)(x-z) \geq 0 \Leftrightarrow 3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^2y \Leftrightarrow \sum_{\text{sym}} xyz + \sum_{\text{sym}} x^3 \geq 2 \sum_{\text{sym}} x^2y.$$

Hệ quả 3.2.1. Cho x, y, z là các số thực không âm. Khi đó, ta có

$$3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq 2 \left((xy)^{\frac{3}{2}} + (yz)^{\frac{3}{2}} + (zx)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Chứng minh. Bằng bất đẳng thức Schur và bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq \sum_{\text{cyclic}} x^2y + xy^2 \geq \sum_{\text{cyclic}} 2(xy)^{\frac{3}{2}}.$$

□

Chúng ta sử dụng bất đẳng thức Schur để cho một các giải khác

(APMO 2004/5) Chứng minh rằng, với mọi số thực dương a, b, c ,

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Cách giải 2. Sau khi khai triển, nó trở thành

$$8 + (abc)^2 + 2 \sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 + 4 \sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 9 \sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Từ bất đẳng thức $(ab - 1)^2 + (bc - 1)^2 + (ca - 1)^2 \geq 0$, ta được

$$6 + 2 \sum_{\text{cyclic}} a^2b^2 \geq 4 \sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Vì thế, ta chỉ chứng minh như sau là đủ

$$2 + (abc)^2 + 4 \sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 5 \sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Vì $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(ab + bc + ca)$, nên cũng chỉ chứng minh

$$2 + (abc)^2 + \sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 2 \sum_{\text{cyclic}} ab,$$

mà đây là trường hợp đặc biệt khi $t = 1$. □

Hệ quả 3.2.2. Cho $t \in (0, 3]$. Với mọi $a, b, c \geq 0$, ta có

$$(3 - t) + t(abc)^{\frac{2}{t}} + \sum_{\text{cyclic}} a^2 \geq 2 \sum_{\text{cyclic}} ab.$$

Đặc biệt, ta được bất đẳng thức không thuần nhất

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2}(abc)^4 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca),$$

$$2 + (abc)^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca),$$

$$1 + 2abc + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Chứng minh. Sau khi đặt $x = a^{\frac{2}{3}}, y = b^{\frac{2}{3}}, z = c^{\frac{2}{3}}$, nó trở thành

$$3 - t + t(xyz)^{\frac{3}{t}} + \sum_{\text{cyclic}} x^3 \geq 2 \sum_{\text{cyclic}} (xy)^{\frac{3}{2}}.$$

Theo hệ quả 1, ta chỉ cần chứng minh sau là đủ

$$3 - t + t(xyz)^{\frac{3}{t}} \geq 3xyz,$$

đây là hệ quả của bất đẳng thức AM-GM có trọng:

$$\frac{3-t}{3} \cdot 1 + \frac{t}{3}(xyz)^{\frac{3}{t}} \geq 1^{\frac{3-t}{3}} \left((xyz)^{\frac{3}{t}} \right)^{\frac{t}{3}} = 3xyz.$$

Ta có thể thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

(IMO 2000/2) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Cách giải 2. Ta có bất đẳng thức tương đương với bất đẳng thức thuần nhất sau ¹:

$$\left(a - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{b}\right) \left(b - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{c}\right) \left(c - (abc)^{1/3} + \frac{(abc)^{2/3}}{a}\right) \leq abc.$$

¹Với cách thuần nhất thích hợp, ta thấy bài toán 1 trong chương 2.

Sau khi thế $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ với $x, y, z > 0$, nó trở thành

$$\left(x^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{y^3}\right) \left(y^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{z^3}\right) \left(z^3 - xyz + \frac{(xyz)^2}{x^3}\right) \leq x^3 y^3 z^3,$$

rút gọn, ta được

$$(x^2 y - y^2 z + z^2 x) (y^2 z - z^2 x + x^2 y) (z^2 x - x^2 y + y^2 z) \leq x^3 y^3 z^3$$

hay

$$3x^3 y^3 z^3 + \sum_{\text{cyclic}} x^6 y^3 \geq \sum_{\text{cyclic}} x^4 y^4 z + \sum_{\text{cyclic}} x^5 y^2 z^2$$

hay

$$3(x^2 y)(y^2 z)(z^2 x) + \sum_{\text{cyclic}} (x^2 y)^3 \geq \sum_{\text{sym}} (x^2 y)^2 (y^2 z)$$

đây là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Schur. □

Đây là bài bất đẳng thức khác với ràng buộc $abc = 1$.

Bài toán 26. (Tournament of Towns 1997) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Giải. Ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau:

$$\frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{b+c+(abc)^{1/3}} + \frac{1}{c+a+(abc)^{1/3}} \leq \frac{1}{(abc)^{1/3}}.$$

Ta thế $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ với $x, y, z > 0$. Khi đó, nó trở thành

$$\frac{1}{x^3 + y^3 + xyz} + \frac{1}{y^3 + z^3 + xyz} + \frac{1}{z^3 + x^3 + xyz} \leq \frac{1}{xyz}$$

tương đương

$$xyz \sum_{\text{cyclic}} (x^3 + y^3 + xyz)(y^3 + z^3 + xyz) \leq (x^3 + y^3 + xyz)(y^3 + z^3 + xyz)(z^3 + x^3 + xyz)$$

hay

$$\sum_{\text{sym}} x^6 y^3 \geq \sum_{\text{sym}} x^5 y^2 z^2 \quad !$$

Ta áp dụng định lý 9, được

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} x^6 y^3 &= \sum_{\text{cyclic}} x^6 y^3 + y^6 x^3 \\ &\geq \sum_{\text{cyclic}} x^5 y^4 + y^5 x^4 \\ &= \sum_{\text{cyclic}} x^5 (y^4 + z^4) \\ &\geq \sum_{\text{cyclic}} x^5 (y^2 z^2 + y^2 z^2) \\ &= \sum_{\text{sym}} x^5 y^2 z^2. \end{aligned}$$

□

Bài tập 8. ([TZ], pp.142) Chứng minh rằng với tam giác nhọn ABC ,

$$\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6 \cot A \cot B \cot C \geq \cot A + \cot B + \cot C.$$

Bài tập 9. (Korea 1998) Chọn I là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \geq \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{3}.$$

Bài tập 10. ([IN], pp.103) Cho a, b, c là các cạnh của tam giác. Chứng minh

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc.$$

Bài tập 11. (Bất đẳng thức Surányi) Chứng minh rằng, với mọi $x_1, \dots, x_n \geq 0$,

$$(n-1)(x_1^n + \dots + x_n^n) + nx_1 \dots x_n \geq (x_1 + \dots + x_n)(x_1^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}).$$

Định lý 3.2.2. (Muirhead) Cho $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ là các số thực dương sao cho

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0, b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0, a_1 \geq b_1, a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2, a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Cho x, y, z là các số dương. Khi đó, ta có $\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$.

Chứng minh. Trường hợp 1. $b_1 \geq a_2$: Ta suy ra từ $a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1$ và từ $a_1 \geq b_1$ mà $a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$ sao cho $\max(a_1, a_2) = a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$. Từ $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$ và $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$, ta có $\max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3)$.

Áp dụng định lý 8 hai lần ta được

$$\begin{aligned} \sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3} (x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1}) \\ &\geq \sum_{\text{cyclic}} z^{a_3} (x^{a_1 + a_2 - b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1 + a_2 - b_1}) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1} (y^{a_1 + a_2 - b_1} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_1 + a_2 - b_1}) \\ &\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{b_1} (y^{b_2} z^{b_3} + y^{b_3} z^{b_2}) \\ &= \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $b_1 \leq a_2$: Ta suy ra từ $3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3$ mà $b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$ và $a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$. Vì thế, ta có $\max(a_2, a_3) \geq \max(b_1, a_2 + a_3 - b_1)$

và $\max(a_1, a_2 + a_3 - b_1) \geq \max(b_2, b_3)$. Áp dụng định lý 8 hai lần ta được

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{sym}} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1} (y^{a_2} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_2}) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} x^{a_1} (y^{b_1} z^{a_2+a_3-b_1} + y^{a_2+a_3-b_1} z^{b_1}) \\
&= \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1} (x^{a_1} z^{a_2+a_3-b_1} + x^{a_2+a_3-b_1} z^{a_1}) \\
&\geq \sum_{\text{cyclic}} y^{b_1} (x^{b_2} z^{b_3} + x^{b_3} z^{b_2}) \\
&= \sum_{\text{sym}} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}.
\end{aligned}$$

□

Ghi chú 3.2.2. Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Tuy nhiên, nếu ta cho $x = 0$ hay $y = 0$ hay $z = 0$, khi đó ta có thể dễ dàng kiểm tra đẳng thức xảy ra khi $a_1, a_2, a_3 > 0$ và $b_1, b_2, b_3 > 0$ nếu và chỉ nếu

$$x = y = z \text{ hay } x = y, z = 0 \text{ hay } y = z, x = 0 \text{ hay } z = x, y = 0.$$

Ta có thể sử dụng định lý Muirhead để chứng minh bất đẳng thức Nesbitt.

(Nesbitt) Với mọi số thực dương a, b, c , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 6. Quy đồng khử mẫu ta được

$$2 \sum_{\text{cyclic}} a(a+b)(a+c) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \text{ hay } \sum_{\text{sym}} a^3 \geq \sum_{\text{sym}} a^2b.$$

(IMO 1995) Cho a, b, c là các số dương sao cho $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Cách giải 2. Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2(abc)^{4/3}}.$$

Đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3$ với $x, y, z > 0$. Khi đó, nó trở thành $\sum_{\text{cyclic}} \frac{1}{x^9(y^3+z^3)} \geq \frac{3}{2x^4y^4z^4}$.
Khử mẫu ta được

$$\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} + 2 \sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 + \sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 \geq 3 \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5 + 6x^8y^8z^8$$

hay

$$\left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^{12} - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\right) + 2\left(\sum_{\text{sym}} x^{12}y^9z^3 - \sum_{\text{sym}} x^{11}y^8z^5\right) + \left(\sum_{\text{sym}} x^9y^9z^6 - \sum_{\text{sym}} x^8y^8z^8\right) \geq 0,$$

và mỗi số hạng ở vế trái không âm theo định lý Muirhead. \square

Bài toán 27. (Iran 1996) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$4 \sum_{\text{sym}} x^5y + 2 \sum_{\text{cyclic}} x^4yz + 6x^2y^2z^2 - \sum_{\text{sym}} x^4y^2 - 6 \sum_{\text{cyclic}} x^3y^3 - 2 \sum_{\text{sym}} x^3y^2z \geq 0.$$

Ta viết lại

$$\left(\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^4y^2\right) + 3\left(\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^3y^3\right) + 2xyz \left(3xyz + \sum_{\text{cyclic}} x^3 - \sum_{\text{sym}} x^2y\right) \geq 0.$$

Theo định lý Muirhead và bất đẳng thức Schur, nó là tổng của ba số hạng không âm. \square

Bài toán 28. Cho x, y, z là các số thực không âm với $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{5}{2}.$$

Chứng minh. Sử dụng $xy + yz + zx = 1$, ta đồng nhất hóa bất đẳng thức đã cho:

$$(xy + yz + zx) \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right)^2 \geq \left(\frac{5}{2} \right)^2$$

hay

$$4 \sum_{\text{sym}} x^5y + \sum_{\text{sym}} x^4yz + 14 \sum_{\text{sym}} x^3y^2z + 38x^2y^2z^2 \geq \sum_{\text{sym}} x^4y^2 + 3 \sum_{\text{sym}} x^3y^3$$

hay

$$\left(\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^4y^2\right) + 3\left(\sum_{\text{sym}} x^5y - \sum_{\text{sym}} x^3y^3\right) + xyz \left(\sum_{\text{sym}} x^3 + 14 \sum_{\text{sym}} x^2y + 38xyz\right) \geq 0.$$

Bằng định lý Muirhead, ta nhận kết quả. Trong bất đẳng thức ở trên, không cần điều kiện $xy + yz + zx = 1$, đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $x = y, z = 0$ hay $y = z, x = 0$ hay $z = x, y = 0$. Vì $xy + yz + zx = 1$, đẳng thức xuất hiện khi $(x, y, z) = (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$. \square

3.3 Chuẩn hóa

Trong phần trước, ta đã biết được cách chuyển một bất đẳng thức không thuần nhất sang bất đẳng thức thuần nhất. Hay nói cách khác, bất đẳng thức thuần nhất cũng có thể được chuẩn hóa theo *nhiều* cách khác nhau. Ta đưa ra hai cách giải của bài toán 8 bằng cách chuẩn hóa:

(IMO 2001/2) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Cách giải 3. Ta thực hiện phép thế $x = \frac{a}{a+b+c}$, $y = \frac{b}{a+b+c}$, $z = \frac{c}{a+b+c}$.² Bài toán là:

$$xf(x^2 + 8yz) + yf(y^2 + 8zx) + zf(z^2 + 8xy) \geq 1,$$

trong đó $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Vì f là hàm lồi \mathbb{R}^+ và $x + y + z = 1$, ta áp dụng bất đẳng thức Jensen (có trọng) ta được

$$xf(x^2 + 8yz) + yf(y^2 + 8zx) + zf(z^2 + 8xy) \geq f(x(x^2 + 8yz) + y(y^2 + 8zx) + z(z^2 + 8xy)).$$

Chú ý rằng $f(1) = 1$. Vì hàm f là hàm giảm ngặt, ta chứng minh

$$1 \geq x(x^2 + 8yz) + y(y^2 + 8zx) + z(z^2 + 8xy).$$

Sử dụng $x + y + z = 1$, ta thuần nhất nó $(x + y + z)^3 \geq x(x^2 + 8yz) + y(y^2 + 8zx) + z(z^2 + 8xy)$. Tuy nhiên, ta dễ thấy từ

$$(x + y + z)^3 - x(x^2 + 8yz) - y(y^2 + 8zx) - z(z^2 + 8xy) = 3[x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2] \geq 0.$$

□

Trong cách giải trên, ta chuẩn hóa $x + y + z = 1$. Bây giờ ta chứng minh nó bằng cách chuẩn hóa $xyz = 1$.

Cách giải 4. Ta sử dụng *phép thế* $x = \frac{bc}{a^2}$, $y = \frac{ca}{b^2}$, $z = \frac{ab}{c^2}$. Khi đó, ta được $xyz = 1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8x}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8y}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8z}} \geq 1$$

tương đương

$$\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{(1 + 8x)(1 + 8y)} \geq \sqrt{(1 + 8x)(1 + 8y)(1 + 8z)}.$$

Sau khi bình phương hai vế, nó tương đương

$$8(x + y + z) + 2\sqrt{(1 + 8x)(1 + 8y)(1 + 8z)} \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{1 + 8x} \geq 510.$$

²Chia $a + b + c$ ra bất đẳng thức tương đương $\sum_{\text{cyclic}} \frac{\frac{a}{a+b+c}}{\sqrt{\frac{a^2}{(a+b+c)^2} + \frac{8bc}{(a+b+c)^2}}} \geq 1$.

Ta nhớ rằng $xyz = 1$. Bất đẳng thức AM-GM cho ta $x + y + z \geq 3$,

$$(1+8x)(1+8y)(1+8z) \geq 9x^{\frac{8}{9}} \cdot 9y^{\frac{8}{9}} \cdot 9z^{\frac{8}{9}} = 729 \quad \text{và} \quad \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{1+8x} \geq \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{9x^{\frac{8}{9}}} \geq 9(xyz)^{\frac{4}{27}} = 9.$$

Sử dụng ba bất đẳng thức này ta được. □

(IMO 1983/6) Cho a, b, c là các cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

Cách giải 2. Sau khi đặt $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ với $x, y, z > 0$, nó trở thành

$$x^3z + y^3x + z^3y \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \quad \text{hay} \quad \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z.$$

Vì nó thuần nhất, ta có thể giới hạn trong trường hợp $x + y + z = 1$. Khi đó, nó trở thành

$$yf\left(\frac{x}{y}\right) + zf\left(\frac{y}{z}\right) + xf\left(\frac{z}{x}\right) \geq 1,$$

trong đó $f(t) = t^2$. Vì f là hàm lồi trên \mathbb{R} , ta áp dụng bất đẳng thức Jensen (có trọng) ta được

$$yf\left(\frac{x}{y}\right) + zf\left(\frac{y}{z}\right) + xf\left(\frac{z}{x}\right) \geq f\left(y \cdot \frac{x}{y} + z \cdot \frac{y}{z} + x \cdot \frac{z}{x}\right) = f(1) = 1.$$

□

Bài toán 29. (KMO Mùa Đông 2001) Chứng minh rằng, cho $a, b, c > 0$,

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

Cách giải 1. Chia cho abc , nó trở thành

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right)} \geq abc + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc} + 1\right)\left(\frac{b^2}{ca} + 1\right)\left(\frac{c^2}{ab} + 1\right)}.$$

Sau khi thế $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$, ta được ràng buộc $xyz = 1$. Nó lấy từ

$$\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)} \geq 1 + \sqrt[3]{\left(\frac{x}{z} + 1\right)\left(\frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{z}{y} + 1\right)}.$$

Từ ràng buộc $xyz = 1$, ta tìm hai đồng nhất thức

$$\left(\frac{x}{z} + 1\right)\left(\frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{z}{y} + 1\right) = \left(\frac{x+z}{z}\right)\left(\frac{y+x}{x}\right)\left(\frac{z+y}{y}\right) = (z+x)(x+y)(y+z),$$

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) = (x+y)(y+z)(z+x) + xyz = (x+y)(y+z)(z+x) + 1.$$

Cho $p = \sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$, bất đẳng thức trở thành $\sqrt{p^3 + 1} \geq 1 + p$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $p \geq \sqrt[3]{2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx}} = 2$. It follows that $(p^3 + 1) - (1 + p)^2 = p(p+1)(p-2) \geq 0$. □

Bài toán 30. (IMO 1999/2) Cho n là số nguyên với $n \geq 2$.

(a) Xác định hằng nhỏ nhất C sao cho xảy ra bất đẳng thức

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

với mọi số thực $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

(b) Cho hằng C , hãy xác định khi nào đẳng thức xảy ra.

Cách giải 1. (Marcin E. Kuczma³) Với $x_1 = \dots = x_n = 0$, xảy ra với bất kỳ $C \geq 0$. Vì vậy, ta xét trường hợp khi $x_1 + \dots + x_n > 0$. Vì bất đẳng thức thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa thành $x_1 + \dots + x_n = 1$. Ta ký hiệu

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

Từ giả thiết $x_1 + \dots + x_n = 1$, ta có

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^3 = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i (x_i^2 - x_i^3). \end{aligned}$$

Ta nói rằng $C = \frac{1}{8}$. Đủ chứng tỏ rằng

$$F(x_1, \dots, x_n) \leq \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right).$$

Bổ đề 3.3.1. $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}$ suy ra $x^2 - x^3 \leq y^2 - y^3$.

Chứng minh. Vì $x + y \leq 1$, ta được $x + y \geq (x + y)^2 \geq x^2 + xy + y^2$. Vì $y - x \geq 0$, từ đây suy ra $y^2 - x^2 \geq y^3 - x^3$ hay $y^2 - y^3 \geq x^2 - x^3$, như mong muốn. \square

Trường hợp 1. $\frac{1}{2} \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$

$$\sum_{i=1}^n x_i (x_i^2 - x_i^3) \leq \sum_{i=1}^n x_i \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right) = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{8}.$$

Trường hợp 2. $x_1 \geq \frac{1}{2} \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ Let $x_1 = x$ và $y = 1 - x = x_2 + \dots + x_n$. Since $y \geq x_2, \dots, x_n$,

$$F(x_1, \dots, x_n) = x^3 y + \sum_{i=2}^n x_i (x_i^2 - x_i^3) \leq x^3 y + \sum_{i=2}^n x_i (y^2 - y^3) = x^3 y + y(y^2 - y^3).$$

³Tôi chỉ thay đổi một ít cách giải của tác giả trong [Au99].

Since $x^3y + y(y^2 - y^3) = x^3y + y^3(1 - y) = xy(x^2 + y^2)$, it remains to show that

$$xy(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{8}.$$

Sử dụng $x + y = 1$, ta thuần nhất hóa bất đẳng thức trên như sau.

$$xy(x^2 + y^2) \leq \frac{1}{8}(x + y)^4.$$

Tuy nhiên, ta thấy ngay rằng $(x + y)^4 - 8xy(x^2 + y^2) = (x - y)^4 \geq 0$.

□

Bài tập 12. (IMO 1991) Cho n là một số nguyên với $n \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i + x_j),$$

trong đó $x_1, \dots, x_n \geq 0$ và $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Ta kết thúc phần này bằng chứng minh khác của bất đẳng thức Nesbitt.

(Nesbitt) Với mọi số thực dương a, b, c , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 7. Ta có thể chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Chú ý rằng $0 < a, b, c < 1$. Bài toán bây giờ trở thành chứng minh

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} = \sum_{\text{cyclic}} f(a) \geq \frac{3}{2}, \text{ trong } \emptyset f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Vì f là hàm lồi trên $(0, 1)$, bất đẳng thức Jensen chỉ ra

$$\frac{1}{3} \sum_{\text{cyclic}} f(a) \geq f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ hay } \sum_{\text{cyclic}} f(a) \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 8. (Cao Minh Quang) Giả sử $a+b+c = 1$. Chú ý $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$. Mạnh hơn, ta lập

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 3 - \frac{9}{2}(ab+bc+ca)$$

hay

$$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{9a(b+c)}{4}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{9b(c+a)}{4}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{9c(a+b)}{4}\right) \geq 3.$$

Bất đẳng thức AM-GM chứng tỏ

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} + \frac{9a(b+c)}{4} \geq \sum_{\text{cyclic}} 2\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{9a(b+c)}{4}} = \sum_{\text{cyclic}} 3a = 3.$$

Chứng minh 9. Bây giờ, ta tách đối xứng bằng cách chuẩn hóa phù hợp. Vì bất đẳng thức đối xứng theo ba biến, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Sau khi thế $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c}$, ta có $x \geq y \geq 1$. Nó trở thành

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}} \geq \frac{3}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} \geq 2 \quad \text{hay} \quad \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq 2 - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{x+1}.$$

Ta chứng tỏ rằng

$$2 - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+y} \Leftrightarrow \frac{y-1}{2(1+y)} \geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}.$$

Tuy nhiên, bất đẳng thức sau cùng rõ ràng xảy ra với $x \geq y \geq 1$.

Chứng minh 10. Như trong chứng minh trước, ta chuẩn hóa $c = 1$ với giả sử $a \geq b \geq 1$. Ta chứng minh

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Cho $A = a + b$ và $B = ab$. Nó trở thành

$$\frac{a^2 + b^2 + a + b}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \text{hay} \quad \frac{A^2 - 2B + A}{A + B + 1} + \frac{1}{A} \geq \frac{3}{2} \quad \text{hay} \quad 2A^3 - A^2 - A + 2 \geq B(7A - 2).$$

Vì $7A - 2 > 2(a + b - 1) > 0$ và $A^2 = (a + b)^2 \geq 4ab = 4B$, ta chỉ cần chứng minh

$$4(2A^3 - A^2 - A + 2) \geq A^2(7A - 2) \Leftrightarrow A^3 - 2A^2 - 4A + 8 \geq 0.$$

Tuy nhiên, ta dễ thấy rằng $A^3 - 2A^2 - 4A + 8 = (A - 2)^2(A + 2) \geq 0$.

3.4 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và Bất đẳng thức Hölder

Ta bắt đầu bằng định lý nổi tiếng sau:

Định lý 3.4.1. (Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz) Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực. Khi đó,

$$(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Chứng minh. Cho $A = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ và $B = \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$. Trong trường hợp khi $A = 0$, ta được $a_1 = \dots = a_n = 0$. Vì thế, bất đẳng thức đã cho dễ dàng xảy ra. Vì thế, ta có thể giả sử rằng $A, B > 0$. Ta chuẩn hóa

$$1 = a_1^2 + \dots + a_n^2 = b_1^2 + \dots + b_n^2.$$

Vì vậy, ta cần chứng minh rằng

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq 1.$$

Ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM dẫn ra

$$|x_1y_1 + \dots + x_ny_n| \leq |x_1y_1| + \dots + |x_ny_n| \leq \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} + \dots + \frac{x_n^2 + y_n^2}{2} = 1.$$

□

Bài tập 13. Chứng minh đồng nhất thức Lagrange:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_ib_j - a_jb_i)^2.$$

Bài tập 14. (Darij Grinberg) Giả sử rằng $0 < a_1 \leq \dots \leq a_n$ và $0 < b_1 \leq \dots \leq b_n$ là các số thực. Chứng minh

$$\frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)^2 > \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2$$

Bài tập 15. ([PF], S. S. Wagner) Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực. Giả sử rằng $x \in [0, 1]$. Chứng minh

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2x \sum_{i < j} a_ia_j\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 + 2x \sum_{i < j} b_ib_j\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i + x \sum_{i \leq j} a_ib_j\right)^2.$$

Bài tập 16. Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực dương. Chứng tỏ

$$\sqrt{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)} \geq \sqrt{a_1b_1} + \dots + \sqrt{a_nb_n}.$$

Bài tập 17. Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}.$$

Bài tập 18. Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực dương. Chứng tỏ

$$\frac{a_1}{b_1^2} + \dots + \frac{a_n}{b_n^2} \geq \frac{1}{a_1 + \dots + a_n} \left(\frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \right)^2.$$

Bài tập 19. Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}.$$

Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta cho một cách giải khác của bài toán sau.

(Iran 1998) Chứng minh rằng, với $x, y, z > 1$ sao cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$,

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

Cách giải 3. Ta ký hiệu $\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} = 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta dẫn ra

$$\sqrt{x+y+z} = \sqrt{(x+y+z) \left(\frac{x-1}{x} + \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \right)} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

□

Ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức Nesbitt.

(Nesbitt) Với mọi số dương a, b, c , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 11. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$((b+c) + (c+a) + (a+b)) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 3^2.$$

Ta suy ra từ

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} + \frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2} \quad \text{hay} \quad 3 + \sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} \geq \frac{9}{2}.$$

Chứng minh 12. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} \sum_{\text{cyclic}} a(b+c) \geq \left(\sum_{\text{cyclic}} a \right)^2 \quad \text{hay} \quad \sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 31. (*Gazeta Matematică*) Chứng minh rằng, với mọi $a, b, c > 0$,

$$\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4} \geq a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ca} + c\sqrt{2c^2 + ab}.$$

Giải. Ta được chuỗi đẳng thức và bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} &= \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{\left(a^4 + \frac{a^2b^2}{2}\right) + \left(b^4 + \frac{a^2b^2}{2}\right)} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\text{cyclic}} \left(\sqrt{a^4 + \frac{a^2b^2}{2}} + \sqrt{b^4 + \frac{a^2b^2}{2}} \right) \quad (\text{Cauchy} - \text{Schwarz}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\text{cyclic}} \left(\sqrt{a^4 + \frac{a^2b^2}{2}} + \sqrt{a^4 + \frac{a^2c^2}{2}} \right) \\ &\geq \sqrt{2} \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{\left(a^4 + \frac{a^2b^2}{2}\right) \left(a^4 + \frac{a^2c^2}{2}\right)} \quad (\text{AM} - \text{GM}) \\ &\geq \sqrt{2} \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{a^4 + \frac{a^2bc}{2}} \quad (\text{Cauchy} - \text{Schwarz}) \\ &= \sum_{\text{cyclic}} \sqrt{2a^4 + a^2bc}. \end{aligned}$$

□

Đây là nghiệm ingenious của

(KMO Mùa Đông 2001) Chứng minh, với mọi $a, b, c > 0$,

$$\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \geq abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}$$

Cách giải 2. (dựa theo bài giải của bên tham gia) Ta có

$$\begin{aligned} &\sqrt{(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{[b(a^2 + bc) + c(b^2 + ca) + a(c^2 + ab)][c(a^2 + bc) + a(b^2 + ca) + b(c^2 + ab)]} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{bc}(a^2 + bc) + \sqrt{ca}(b^2 + ca) + \sqrt{ab}(c^2 + ab) \right) \quad (\text{Cauchy} - \text{Schwarz}) \\ &\geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\sqrt{bc}(a^2 + bc) \cdot \sqrt{ca}(b^2 + ca) \cdot \sqrt{ab}(c^2 + ab)} \quad (\text{AM} - \text{GM}) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)} + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)} \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{2\sqrt{a^3 \cdot abc} \cdot 2\sqrt{b^3 \cdot abc} \cdot 2\sqrt{c^3 \cdot abc}} + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)} \quad (\text{AM} - \text{GM}) \\ &= abc + \sqrt[3]{(a^3 + abc)(b^3 + abc)(c^3 + abc)}. \end{aligned}$$

□

Bài toán 32. (Andrei Ciupan) Cho a, b, c là số thực dương sao cho

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \geq 1.$$

Show that $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

Cách giải 2. (by Andrei Ciupan) Bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta được

$$(a+b+1)(a+b+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

hay

$$\frac{1}{a+b+1} \leq \frac{c^2+a+b}{(a+b+c)^2}.$$

Bây giờ bằng cách tính tổng cyclic, ta được

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq \frac{a^2+b^2+c^2+2(a+b+c)}{(a+b+c)^2}$$

Nhưng từ điều kiện, ta có thể thấy rằng

$$a^2+b^2+c^2+2(a+b+c) \geq (a+b+c)^2,$$

và vì thế

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

Ta thấy rằng đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu $a=b=c=1$. □

Cách giải 2. (by Cezar Lupu) Trước tiên, ta thấy rằng

$$2 \geq \sum_{\text{cyclic}} \left(1 - \frac{1}{a+b+1}\right) = \sum_{\text{cyclic}} \frac{a+b}{a+b+1} = \sum_{\text{cyclic}} \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+a+b}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$2 \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{(a+b)^2}{(a+b)^2+a+b} \geq \frac{(\sum a+b)^2}{\sum (a+b)^2+a+b} = \frac{4\sum a^2+8\sum ab}{2\sum a^2+2\sum ab+2\sum a}.$$

hay

$$a+b+c \geq ab+bc+ca.$$

□

Ta minh họa kỹ thuật chuẩn hóa để thiết lập các định lý cổ điển. Sử dụng cùng ý tưởng trong việc chứng minh bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta tìm cách tổng quát:

Định lý 3.4.2. Cho $a_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$ là các số thực dương. Khi đó, ta có

$$(a_{11}^n + \dots + a_{1n}^n) \cdots (a_{n1}^n + \dots + a_{nn}^n) \geq (a_{11}a_{21} \cdots a_{n1} + \dots + a_{1n}a_{2n} \cdots a_{nn})^n.$$

Chứng minh. Vì bất đẳng thức thuần nhất, như trong chứng minh của định lý 11, ta chuẩn hóa

$$(a_{i1}^n + \cdots + a_{in}^n)^{\frac{1}{n}} = 1 \text{ hay } a_{i1}^n + \cdots + a_{in}^n = 1 \quad (i = 1, \cdots, n).$$

Khi đó, bất đẳng thức có dạng $a_{11}a_{21} \cdots a_{n1} + \cdots + a_{1n}a_{2n} \cdots a_{nn} \leq 1$ hay $\sum_{i=1}^n a_{i1} \cdots a_{in} \leq 1$. Vì vậy, ta chỉ cần chứng tỏ rằng, với mọi $i = 1, \cdots, n$,

$$a_{i1} \cdots a_{in} \leq \frac{1}{n}, \text{ trong đó } a_{i1}^n + \cdots + a_{in}^n = 1.$$

Để hoàn tất chứng minh, ta vẫn còn bất đẳng thức thuần nhất sau: □

Định lý 3.4.3. (Bất đẳng thức AM-GM) Cho a_1, \cdots, a_n là các số thực dương. Khi đó, ta có

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Chứng minh. Vì bất đẳng thức là thuần nhất, ta có thể "giãn" a_1, \cdots, a_n sao cho $a_1 \cdots a_n = 1$.⁴ Ta muốn chứng tỏ rằng

$$a_1 \cdots a_n = 1 \implies a_1 + \cdots + a_n \geq n.$$

Chứng minh bằng dẫn chứng theo n . Nếu $n = 1$, tầm thường. Nếu $n = 2$, khi đó ta được $a_1 + a_2 - 2 = a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2} = (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$. Bây giờ, ta giả sử rằng bất đẳng thức xảy ra với số nguyên dương $n \geq 2$ nào đó. Và cho a_1, \cdots, a_{n+1} là các số dương sao cho $a_1 \cdots a_n a_{n+1} = 1$. Ta giả sử rằng $a_1 \geq 1 \geq a_2$. (Tại sao?) Suy ra từ $a_1 a_2 + 1 - a_1 - a_2 = (a_1 - 1)(a_2 - 1) \leq 0$ sao cho $a_1 a_2 + 1 \leq a_1 + a_2$. Vì $(a_1 a_2) a_3 \cdots a_n = 1$, do giả thuyết quy nạp, ta có $a_1 a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \geq n$. Vì vậy, $a_1 + a_2 - 1 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \geq n$. □

Quan sát đơn giản sau (không là mẹo đâu nhé!):

Cho $a, b > 0$ và $m, n \in \mathbf{N}$. Lấy $x_1 = \cdots = x_m = a$ và $x_{m+1} = \cdots = x_{m+n} = b$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho $x_1, \cdots, x_{m+n} > 0$, ta được

$$\frac{ma + nb}{m + n} \geq (a^m b^n)^{\frac{1}{m+n}} \text{ hay } \frac{m}{m+n}a + \frac{n}{m+n}b \geq a^{\frac{m}{m+n}} b^{\frac{n}{m+n}}.$$

Vì vậy, với mọi số hữu tỉ dương ω_1 và ω_2 với $\omega_1 + \omega_2 = 1$, ta được

$$\omega_1 a + \omega_2 b \geq a^{\omega_1} b^{\omega_2}.$$

Ta có

Định lý 3.4.4. Cho $\omega_1, \omega_2 > 0$ with $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Với mọi $x, y > 0$, ta có

$$\omega_1 x + \omega_2 y \geq x^{\omega_1} y^{\omega_2}.$$

⁴Đặt $x_i = \frac{a_i}{(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}}$ ($i = 1, \cdots, n$). Khi đó, ta được $x_1 \cdots x_n = 1$ và nó trở thành $x_1 + \cdots + x_n \geq n$.

Chứng minh. Ta có thể chọn dãy số dương hữu tỉ a_1, a_2, a_3, \dots sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \omega_1.$$

Và đặt $b_i = 1 - a_i$, ta được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \omega_2.$$

Từ quan sát trước, ta có

$$a_n x + b_n y \geq x^{a_n} y^{b_n}$$

Bằng cách lấy giới hạn hai vế, ta được kết quả. \square

Thay đổi một chút ở trên, ta thấy bất đẳng thức AM-GM dẫn ra

Định lý 3.4.5. (Bất đẳng thức AM-GM có trọng) Cho $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ với $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$. Với mọi $x_1, \dots, x_n > 0$, ta có

$$\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n \geq x_1^{\omega_1} \dots x_n^{\omega_n}.$$

Cách khác, ta thấy rằng nó là hệ quả của hàm lồi $\ln x$. Thật vậy, bất đẳng thức Jensen có trọng nói rằng $\ln(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n) \geq \omega_1 \ln(x_1) + \dots + \omega_n \ln(x_n) = \ln(x_1^{\omega_1} \dots x_n^{\omega_n})$.

Nhớ lại rằng bất đẳng thức AM-GM được sử dụng để dẫn ra định lý 18, đó là tổng quát của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Vì ta có bất đẳng thức AM-GM có trọng, ta lập bất đẳng thức Cauchy-Schwarz có trọng.

Định lý 3.4.6. (Hölder) Cho x_{ij} ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$) là các số thực dương. Giả sử rằng $\omega_1, \dots, \omega_n$ là các số thực thỏa mãn $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$. Khi đó, ta có

$$\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{i=1}^m \left(\prod_{j=1}^n x_{ij}^{\omega_j} \right).$$

Chứng minh. Vì tính thuần nhất của bất đẳng thức, như trong chứng minh định lý 12, ta có thể giãn (rescale) x_{1j}, \dots, x_{mj} sao cho $x_{1j} + \dots + x_{mj} = 1$ với mỗi $j \in \{1, \dots, n\}$. Khi đó, ta cần chứng tỏ

$$\prod_{j=1}^n 1^{\omega_j} \geq \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\omega_j} \quad \text{hay} \quad 1 \geq \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\omega_j}.$$

Bất đẳng thức AM-GM có trọng cho ta

$$\sum_{j=1}^n \omega_j x_{ij} \geq \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\omega_j} \quad (i \in \{1, \dots, m\}) \implies \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_j x_{ij} \geq \sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n x_{ij}^{\omega_j}.$$

Tuy nhiên, ta có ngay

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_j x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \omega_j x_{ij} = \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \omega_j = 1.$$

\square

CHƯƠNG 4

TÍNH LỒI

Bất kỳ ý tưởng nào chỉ thể hiện không quá mười từ. S. M. Ulam

4.1 Bất đẳng thức Jensen

Trong chương trước, ta dẫn ra bất đẳng thức AM-GM có trọng từ bất đẳng thức AM-GM. Ta sử dụng cùng ý tưởng để nghiên cứu các bất đẳng thức hàm sau đây.

Mệnh đề 4.1.1. Cho $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm **liên tục**. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương.

(1) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, bất đẳng thức sau xảy ra.

$$\omega_1 f(x_1) + \cdots + \omega_n f(x_n) \geq f(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n)$$

với mọi $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ và $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ với $\omega_1 + \cdots + \omega_n = 1$.

(2) Với mọi $n \in \mathbb{N}$, bất đẳng thức sau xảy ra.

$$r_1 f(x_1) + \cdots + r_n f(x_n) \geq f(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n)$$

với mọi $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ và $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}^+$ với $r_1 + \cdots + r_n = 1$.

(3) Với mọi $N \in \mathbb{N}$, bất đẳng thức sau xảy ra.

$$\frac{f(y_1) + \cdots + f(y_N)}{N} \geq f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_N}{N}\right)$$

với mọi $y_1, \dots, y_N \in [a, b]$.

(4) Với mọi $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, bất đẳng thức sau xảy ra.

$$\frac{f(y_1) + \cdots + f(y_{2^k})}{2^k} \geq f\left(\frac{y_1 + \cdots + y_{2^k}}{2^k}\right)$$

với mọi $y_1, \dots, y_{2^k} \in [a, b]$.

(5) Ta có $\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ với mọi $x, y \in [a, b]$.

(6) Ta có $\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ với mọi $x, y \in [a, b]$ và $\lambda \in (0, 1)$.

Chứng minh. (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) là rõ ràng.

(2) \Rightarrow (1) : Let $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ và $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ với $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$. Ta có thể thấy rằng tồn tại chuỗi số hữu tỉ dương $\{r_k(1)\}_{k \in \mathbb{N}}, \dots, \{r_k(n)\}_{k \in \mathbb{N}}$ thỏa mãn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(j) = \omega_j \quad (1 \leq j \leq n) \quad \text{và} \quad r_k(1) + \dots + r_k(n) = 1 \quad \text{for all } k \in \mathbb{N}.$$

Từ giả thiết trong (2), ta được $r_k(1)f(x_1) + \dots + r_k(n)f(x_n) \geq f(r_k(1)x_1 + \dots + r_k(n)x_n)$. Vì f liên tục, lấy $k \rightarrow \infty$ hai vế dẫn ra bất đẳng thức

$$\omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n) \geq f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n).$$

(3) \Rightarrow (2) : Cho $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ và $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}^+$ với $r_1 + \dots + r_n = 1$. Ta thấy rằng một số nguyên dương $N \in \mathbb{N}$ sao cho $Nr_1, \dots, Nr_n \in \mathbb{N}$. Với mỗi $i \in \{1, \dots, n\}$, ta có thể viết $r_i = \frac{p_i}{N}$, trong đó $p_i \in \mathbb{N}$. Ta suy ra từ $r_1 + \dots + r_n = 1$ that $N = p_1 + \dots + p_n$. Khi đó, (3) suy ra

$$\begin{aligned} & r_1 f(x_1) + \dots + r_n f(x_n) \\ &= \frac{\overbrace{f(x_1) + \dots + f(x_1)}^{p_1 \text{ lần}} + \dots + \overbrace{f(x_n) + \dots + f(x_n)}^{p_n \text{ lần}}}{N} \\ &\geq f\left(\frac{\overbrace{x_1 + \dots + x_1}^{p_1 \text{ lần}} + \dots + \overbrace{x_n + \dots + x_n}^{p_n \text{ lần}}}{N}\right) \\ &= f(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n). \end{aligned}$$

(4) \Rightarrow (3) : Cho $y_1, \dots, y_N \in [a, b]$. Lấy $k \in \mathbb{N}$ sao cho $2^k > N$. Cho $a = \frac{y_1 + \dots + y_N}{N}$. Khi đó, (4) dẫn ra

$$\begin{aligned} & \frac{f(y_1) + \dots + f(y_N) + (2^k - N)f(a)}{2^k} \\ &= \frac{f(y_1) + \dots + f(y_N) + \overbrace{f(a) + \dots + f(a)}^{(2^k - N) \text{ lần}}}{2^k} \\ &\geq f\left(\frac{y_1 + \dots + y_N + \overbrace{a + \dots + a}^{(2^k - N) \text{ lần}}}{2^k}\right) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

sao cho

$$f(y_1) + \dots + f(y_N) \geq Nf(a) = Nf\left(\frac{y_1 + \dots + y_N}{N}\right).$$

(5) \Rightarrow (4) : Ta sử dụng quy nạp theo k . Trong trường hợp $k = 0, 1, 2$, quá rõ ràng. Giả sử (4) xảy ra với $k \geq 2$ nào đó. Cho $y_1, \dots, y_{2^{k+1}} \in [a, b]$. Bằng giả thuyết quy nạp, ta được

$$\begin{aligned}
& f(y_1) + \dots + f(y_{2^k}) + f(y_{2^k+1}) + \dots + f(y_{2^{k+1}}) \\
& \geq 2^k f\left(\frac{y_1 + \dots + y_{2^k}}{2^k}\right) + 2^k f\left(\frac{y_{2^k+1} + \dots + y_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \\
& = 2^{k+1} \frac{f\left(\frac{y_1 + \dots + y_{2^k}}{2^k}\right) + f\left(\frac{y_{2^k+1} + \dots + y_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2} \\
& \geq 2^{k+1} f\left(\frac{\frac{y_1 + \dots + y_{2^k}}{2^k} + \frac{y_{2^k+1} + \dots + y_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right) \\
& = 2^{k+1} f\left(\frac{y_1 + \dots + y_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right).
\end{aligned}$$

Vì vậy, (4) đúng với $k + 1$. Xong quy nạp.

Hơn nữa, Ta đã thiết lập (1), (2), (3), (4), (5) tương đương. Vì (1) \Rightarrow (6) \Rightarrow (5) rõ ràng, Điều này hoàn tất chứng minh. \square

Định nghĩa 4.1.1. Một hàm thực f được gọi là lồi trên $[a, b]$ nếu

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

với $x, y \in [a, b]$ và $\lambda \in (0, 1)$.

Mệnh đề trên nói rằng

Hệ quả 4.1.1. (Bất đẳng thức Jensen) Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi liên tục. Với mọi $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, ta có

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Hệ quả 4.1.2. (Bất đẳng thức Jensen có trọng) Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi liên tục. Cho $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ với $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$. Với mọi $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, ta có

$$\omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n) \geq f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n).$$

Thực ra, ta có thể tính liên tục của f . Như trong bài tập, chúng ta chứng tỏ rằng mỗi hàm lồi trên $[a, b]$ là liên tục trên (a, b) . Vì thế, mỗi hàm lồi trên \mathbb{R} là liên tục trên \mathbb{R} . Ta được

Hệ quả 4.1.3. (Chỉ tiêu lồi I) Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Giả sử

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

với mọi $x, y \in [a, b]$. Khi đó, f là hàm lồi trên $[a, b]$.

Bài tập 20. (Tiêu chuẩn lồi II) Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục có vi phân hai lần trên (a, b) . Chứng tỏ rằng các mệnh đề sau tương đương.

- (1) $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a, b)$.
(2) f là hàm lồi trên (a, b) .

Khi ta dẫn ra (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) trong mệnh đề, ta không sử dụng tính liên tục của f :

Hệ quả 4.1.4. Cho $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm. Giả sử

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

với mọi $x, y \in [a, b]$. Khi đó, ta được

$$r_1 f(x_1) + \cdots + r_n f(x_n) \geq f(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n)$$

với mọi $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ và $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}^+$ with $r_1 + \cdots + r_n = 1$.

Ta kết thúc phần này bằng biểu diễn một chứng minh dẫn chứng quen thuộc của bất đẳng thức Jensen có trọng. Ta có thể bỏ qua tính liên tục của f .

Cách giải 2. Bất đẳng thức đúng với $n = 1, 2$. Ta giả sử nó đúng với $n \in \mathbb{N}$. Cho $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in [a, b]$ và $\omega_1, \dots, \omega_{n+1} > 0$ with $\omega_1 + \cdots + \omega_{n+1} = 1$. Since $\frac{\omega_1}{1-\omega_{n+1}} + \cdots + \frac{\omega_n}{1-\omega_{n+1}} = 1$, ta suy ra từ giả thiết quy nạp

$$\begin{aligned} & \omega_1 f(x_1) + \cdots + \omega_{n+1} f(x_{n+1}) \\ = & (1 - \omega_{n+1}) \left(\frac{\omega_1}{1 - \omega_{n+1}} f(x_1) + \cdots + \frac{\omega_n}{1 - \omega_{n+1}} f(x_n) \right) + \omega_{n+1} f(x_{n+1}) \\ \geq & (1 - \omega_{n+1}) f \left(\frac{\omega_1}{1 - \omega_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\omega_n}{1 - \omega_{n+1}} x_n \right) + \omega_{n+1} f(x_{n+1}) \\ \geq & f \left((1 - \omega_{n+1}) \left[\frac{\omega_1}{1 - \omega_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\omega_n}{1 - \omega_{n+1}} x_n \right] + \omega_{n+1} x_{n+1} \right) \\ = & f(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_{n+1} x_{n+1}). \end{aligned}$$

□

4.2 Các trung bình lũy thừa

Tính lũy thừa là một trong những khái niệm quan trọng trong giải tích. Bất đẳng thức Jensen là công cụ thật sự rất mạnh trong lý thuyết bất đẳng thức. Trong phần này, ta sẽ thiết lập bất đẳng thức trung bình lũy thừa bằng cách áp dụng bất đẳng thức Jensen theo hai cách. Ta bắt đầu với bổ đề đơn giản.

Bổ đề 4.2.1. Cho a, b , và c là các số thực dương. Ta định nghĩa hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bằng cách

$$f(x) = \ln \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right),$$

trong đó $x \in \mathbb{R}$. Khi đó, ta được $f'(0) = \ln(abc)^{\frac{1}{3}}$.

Chứng minh. Ta tính $f'(x) = \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{a^x + b^x + c^x}$. Khi đó, $f'(0) = \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln(abc)^{\frac{1}{3}}$. \square

Bổ đề 4.2.2. Cho $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Giả sử f tăng đơn điệu trên $(0, \infty)$ và tăng đơn điệu trên $(-\infty, 0)$. Khi đó, f tăng đơn điệu trên \mathbb{R} .

Chứng minh. Ta chứng tỏ f tăng đơn điệu trên $[0, \infty)$. Do giả thuyết, ta chứng tỏ $f(x) \geq f(0)$ với mọi $x > 0$. Với mọi $\epsilon \in (0, x)$, ta có $f(x) \geq f(\epsilon)$. Vì f liên tục tại 0, ta được

$$f(x) \geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\epsilon) = f(0).$$

Tương tự, ta thấy rằng f tăng đơn điệu trên $(-\infty, 0]$. Ta chỉ ra rằng f tăng đơn điệu trên \mathbb{R} . Cho x và y là các số thực với $x > y$. Ta muốn chứng tỏ $f(x) \geq f(y)$. Trong trường hợp $0 \notin (x, y)$, ta có được kết quả do giả thuyết. Trong trường hợp $x \geq 0 \geq y$, chỉ ra rằng $f(x) \geq f(0) \geq f(y)$. \square

Định lý 4.2.1. (Bất đẳng thức trung bình lũy thừa theo ba biến) Cho a, b , và c là các số thực dương. Ta định nghĩa một hàm $M_{(a,b,c)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bởi

$$M_{(a,b,c)}(0) = \sqrt[3]{abc}, \quad M_{(a,b,c)}(r) = \left(\frac{a^r + b^r + c^r}{3} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r \neq 0).$$

Khi đó, $M_{(a,b,c)}$ là hàm liên tục tăng đơn điệu.

Chứng minh 1. Viết $M(r) = M_{(a,b,c)}(r)$. Ta thiết lập M liên tục. Vì M liên tục tại r với mọi $r \neq 0$, ta chỉ chứng minh

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \sqrt[3]{abc}.$$

Cho $f(x) = \ln \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)$, trong đó $x \in \mathbb{R}$. Vì $f(0) = 0$, bổ đề 2 chứng tỏ

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r) - f(0)}{r - 0} = f'(0) = \ln \sqrt[3]{abc}.$$

Vì e^x là hàm liên tục, nghĩa là

$$\lim_{r \rightarrow 0} M(r) = \lim_{r \rightarrow 0} e^{\frac{f(r)}{r}} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

Bây giờ, ta chứng tỏ M tăng đơn điệu. Do bổ đề 3, ta thiết lập M tăng đơn điệu trên $(0, \infty)$ và tăng đơn điệu trên $(-\infty, 0)$. Ta chứng tỏ M tăng đơn điệu trên $(0, \infty)$. Cho $x \geq y > 0$. Ta muốn chứng tỏ

$$\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \geq \left(\frac{a^y + b^y + c^y}{3} \right)^{\frac{1}{y}}.$$

Sau khi thế $u = a^y, v = a^y, w = a^z$, nó trở thành

$$\left(\frac{u^{\frac{x}{y}} + v^{\frac{x}{y}} + w^{\frac{x}{y}}}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \geq \left(\frac{u + v + w}{3} \right)^{\frac{1}{y}}.$$

Vì nó thuần nhất, ta chuẩn hóa $u + v + w = 3$. Ta cần chứng minh rằng

$$\frac{G(u) + G(v) + G(w)}{3} \geq 1,$$

trong đó $G(t) = t^{\frac{x}{y}}$, trong đó $t > 0$. Vì $\frac{x}{y} \geq 1$, ta thấy rằng G lồi. Bất đẳng thức Jensen chứng tỏ

$$\frac{G(u) + G(v) + G(w)}{3} \geq G\left(\frac{u + v + w}{3}\right) = G(1) = 1.$$

Tương tự, ta dẫn ra M tăng đơn điệu trên $(-\infty, 0)$. □

Ta đã biết rằng tính lồi của $f(x) = x^\lambda$ ($\lambda \geq 1$) dẫn ra tính đơn điệu của các trung bình lũy thừa. Bây giờ, ta sẽ chứng tỏ tính lồi của $x \ln x$ cũng dẫn ra bất đẳng thức trung bình lũy thừa.

Chứng minh 2 của tính đơn điệu. Viết $f(x) = M_{(a,b,c)}(x)$. Ta sử dụng định lý hàm tăng. Do bổ đề 3, ta chỉ cần chứng minh $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \neq 0$. Cho $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Ta tính

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{d}{dx} (\ln f(x)) = -\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right) + \frac{1}{x} \frac{\frac{1}{3} (a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c)}{\frac{1}{3} (a^x + b^x + c^x)}$$

hay

$$\frac{x^2 f'(x)}{f(x)} = -\ln \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right) + \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{a^x + b^x + c^x}.$$

Ta thiết lập $f'(x) \geq 0$, ta thiết lập

$$a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c \geq (a^x + b^x + c^x) \ln \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right).$$

Ta giới thiệu hàm $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ bởi $f(t) = t \ln t$, trong đó $t > 0$. Sau khi thế $p = a^x, q = a^y, r = a^z$, nó trở thành

$$f(p) + f(q) + f(r) \geq 3f\left(\frac{p + q + r}{3}\right).$$

Vì f lồi trên $(0, \infty)$, từ bất đẳng thức Jensen ta suy ra. □

Từ hệ quả, ta được bất đẳng thức RMS-AM-GM-HM với ba biến.

Hệ quả 4.2.1. Với mọi số thực dương a, b , và c , ta có

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

Chứng minh. Bất đẳng thức trung bình lũy thừa cho ta $M_{(a,b,c)}(2) \geq M_{(a,b,c)}(1) \geq M_{(a,b,c)}(0) \geq M_{(a,b,c)}(-1)$. \square

Sử dụng tính lồi của $x \ln x$ hay tính lồi của x^λ ($\lambda \geq 1$), ta thiết lập tính đơn điệu của trung bình lũy thừa với n là số thực dương.

Định lý 4.2.2. (Bất đẳng thức trung bình lũy thừa) Cho $x_1, \dots, x_n > 0$. Trung bình lũy thừa của bậc r được định nghĩa bởi

$$M_{(x_1, \dots, x_n)}(0) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}, \quad M_{(x_1, \dots, x_n)}(r) = \left(\frac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (r \neq 0).$$

Khi đó, $M_{(x_1, \dots, x_n)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ liên tục và tăng đơn điệu.

Ta kết luận rằng

Hệ quả 4.2.2. (Trung bình hình học là Giới hạn) Cho $x_1, \dots, x_n > 0$. Khi đó,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Định lý 4.2.3. (Bất đẳng thức RMS-AM-GM-HM) Với mọi $x_1, \dots, x_n > 0$, ta có

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

4.3 Bất đẳng thức Trội

Ta nói rằng một vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ trội hơn một vector khác $y = (y_1, \dots, y_n)$ nếu

- (1) $x_1 \geq \dots \geq x_n, y_1 \geq \dots \geq y_n$,
- (2) $x_1 + \dots + x_k \geq y_1 + \dots + y_k$ với mọi $1 \leq k \leq n-1$,
- (3) $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$.

Định lý 4.3.1. (Bất đẳng thức Trội) Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi. Chứng tỏ (x_1, \dots, x_n) majorizes (y_1, \dots, y_n) , trong đó $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in [a, b]$. Khi đó, ta được

$$f(x_1) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + \dots + f(y_n).$$

Ví dụ, ta có thể cực tiểu $\cos A + \cos B + \cos C$, trong đó ABC là tam giác nhọn. Nhớ lại rằng $-\cos x$ lồi trên $(0, \frac{\pi}{2})$. Vì $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0)$ trội (A, B, C) , bất đẳng thức trội chỉ ra

$$\cos A + \cos B + \cos C \geq \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos 0 = 1.$$

Cũng có, trong tam giác ABC , tính lồi của $\tan^2\left(\frac{x}{4}\right)$ trên $[0, \pi]$ và bất đẳng thức trội chỉ ra

$$21 - 12\sqrt{3} = 3 \tan^2\left(\frac{\pi}{12}\right) \leq \tan^2\left(\frac{A}{4}\right) + \tan^2\left(\frac{B}{4}\right) + \tan^2\left(\frac{C}{4}\right) \leq \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan^2 0 + \tan^2 0 = 1.$$

(IMO 1999/2) Cho n là số nguyên $n \geq 2$.

Hãy xác định hằng nhỏ nhất C sao cho bất đẳng thức

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

đúng với mọi số thực $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

Cách giải 2. (Kin Y. Li¹) Như trong cách giải đầu tiên, sau khi chuẩn hóa $x_1 + \dots + x_n = 1$, ta lấy cực đại

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{i=1}^n f(x_i),$$

trong đó $f(x) = x^3 - x^4$ là hàm lồi trên $[0, \frac{1}{2}]$. Vì bất đẳng thức đối xứng, ta có thể giới hạn trong trường hợp $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Nếu $\frac{1}{2} \geq x_1$, khi đó ta thấy rằng $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ trội (x_1, \dots, x_n) . Vì vậy, tính lồi của f trên $[0, \frac{1}{2}]$ và bất đẳng thức Trội chỉ ra

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) + \dots + f(0) = \frac{1}{8}.$$

¹Tôi thay đổi một ít cách giải trong [KYL].

Ta xét trường hợp khi $\frac{1}{2} \geq x_1$. Viết $x_1 = \frac{1}{2} - \epsilon$ với $\epsilon \in [0, \frac{1}{2}]$. Ta thấy $(1 - x_1, 0, \dots, 0)$ trội (x_2, \dots, x_n) . Theo bất đẳng thức Trội, ta thấy rằng

$$\sum_{i=2}^n f(x_i) \leq f(1 - x_1) + f(0) + \dots + f(0) = f(1 - x_1)$$

sao cho

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \leq f(x_1) + f(1 - x_1) = x_1(1 - x_1)[x_1^2 + (1 - x_1)^2] = \left(\frac{1}{4} - \epsilon^2\right) \left(\frac{1}{2} + 2\epsilon^2\right) = 2 \left(\frac{1}{16} - \epsilon^4\right) \leq \frac{1}{8}.$$

□

4.4 Bất đẳng thức áp dụng đường thẳng

Có một cách đơn giản để tìm ra cận mới cho hàm khả vi đã cho. Ta bắt đầu chứng tỏ mọi đường thẳng tiếp tuyến tron ngữ cảnh sau.

Mệnh đề 4.4.1. (Đặc tính của đường thẳng supporting) Cho f là hàm thực. Cho $m, n \in \mathbb{R}$. Giả sử

- (1) $f(\alpha) = m\alpha + n$ với $\alpha \in \mathbb{R}$,
- (2) $f(x) \geq mx + n$ với mọi x trong vài khoảng (ϵ_1, ϵ_2) bao gồm α , và
- (3) f khả vi tại α .

Khi đó, đường supporting $y = mx + n$ của f là đường tiếp tuyến của f tại $x = \alpha$.

Chứng minh. Ta định nghĩa hàm $F : (\epsilon_1, \epsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}$ bằng $F(x) = f(x) - mx - n$ với mọi $x \in (\epsilon_1, \epsilon_2)$. Khi đó, F khả vi tại α và ta được $F'(\alpha) = f'(\alpha) - m$. Do giả sử (1) và (2), ta thấy F có cực tiểu địa phương tại α . Vì thế, định lý đạo hàm đầu tiên cho các giá trị cực trị địa phương chỉ rằng $0 = F'(\alpha) = f'(\alpha) - m$ sao cho $m = f'(\alpha)$ và $n = f(\alpha) - m\alpha = f(\alpha) - f'(\alpha)\alpha$. Từ đó suy ra rằng $y = mx + n = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$. \square

(Nesbitt, 1903) Với mọi số thực dương a, b, c , ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Chứng minh 13. Ta chuẩn hóa $a+b+c=1$. Chú ý $0 < a, b, c < 1$. Bài toán bây giờ chứng minh

$$\sum_{\text{cyclic}} f(a) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{f(a) + f(b) + f(c)}{3} \geq f\left(\frac{1}{3}\right), \text{ trong } \emptyset f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Phương trình của đường tiếp tuyến của f tại $x = \frac{1}{3}$ được cho bởi $y = \frac{9x-1}{4}$. Ta nói rằng $f(x) \geq \frac{9x-1}{4}$ với mọi $x \in (0, 1)$. Ta suy ra từ đẳng thức

$$f(x) - \frac{9x-1}{4} = \frac{(3x-1)^2}{4(1-x)}.$$

Bây giờ, ta kết luận rằng

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{a}{1-a} \geq \sum_{\text{cyclic}} \frac{9a-1}{4} = \frac{9}{4} \sum_{\text{cyclic}} a - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Phát biểu trên có thể được tổng quát hóa. Nếu một hàm f có đường supporting tại vài điểm trên đồ thị của f , khi đó f thỏa mãn bất đẳng thức Jensen's trong ngữ cảnh sau.

Định lý 4.4.1. (Bất đẳng thức đường Supporting) Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm n. Giả sử $\alpha \in [a, b]$ và $m \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x) \geq m(x - \alpha) + f(\alpha)$$

với mọi $x \in [a, b]$. Cho $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ với $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$. Khi đó, bất đẳng thức sau xảy ra

$$\omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n) \geq f(\alpha)$$

với mọi $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ sao cho $\alpha = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$. Đặc biệt, ta được

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{s}{n}\right),$$

trong đó $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ với $x_1 + \dots + x_n = s$ và $s \in [na, nb]$.

Chứng minh. Ta suy ra từ $\omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n) \geq \omega_1 [m(x_1 - \alpha) + f(\alpha)] + \dots + \omega_n [m(x_n - \alpha) + f(\alpha)] = f(\alpha)$. \square

Ta có thể áp dụng bất đẳng thức đường supporting để dẫn ra bất đẳng thức Jensen đối với các hàm vi phân.

Bổ đề 4.4.1. Cho $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi sao cho khả vi hai lần trên (a, b) . Cho $y = l_\alpha(x)$ là đường tiếp tuyến tại $\alpha \in (a, b)$. Khi đó, $f(x) \geq l_\alpha(x)$ for all $x \in (a, b)$.

Chứng minh. Cho $\alpha \in (a, b)$. Ta muốn chứng tỏ đường tiếp tuyến $y = l_\alpha(x) = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$ là đường supporting của f tại $x = \alpha$ sao cho $f(x) \geq l_\alpha(x)$ với mọi $x \in (a, b)$. Tuy nhiên, theo định lý Taylor, ta thấy θ_x giữa α và x sao cho

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\theta_x)}{2}(x - \alpha)^2 \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha).$$

\square

(Bất đẳng thức Jensen có trọng) Cho $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi liên tục sao cho khả vi hai lần trên (a, b) . Cho $\omega_1, \dots, \omega_n > 0$ với $\omega_1 + \dots + \omega_n = 1$. Với mọi $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$,

$$\omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n) \geq f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n).$$

Chứng minh 3. Do tính liên tục của f , ta có thể giả sử $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$. Bây giờ, cho $\mu = \omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n$. Khi đó, $\mu \in (a, b)$. Theo bổ đề trên, f có đường tiếp tuyến $y = l_\mu(x) = f'(\mu)(x - \mu) + f(\mu)$ tại $x = \mu$ satisfying $f(x) \geq l_\mu(x)$ với mọi $x \in (a, b)$. Vì vậy, bất đẳng thức đường supporting chứng tỏ rằng

$$\omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_n f(x_n) \geq \omega_1 f(\mu) + \dots + \omega_n f(\mu) = f(\mu) = f(\omega_1 x_1 + \dots + \omega_n x_n).$$

\square

Ta chú ý rằng hàm cosine lồi trên $[0, \frac{\pi}{2}]$ và lõm trên $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Hàm không lồi trên có thể lồi địa phương và có các đường supporting tại vài điểm. Điều này có nghĩa là bất đẳng thức đường supporting là công cụ rất hay vì chúng ta có thể sinh ra các bất đẳng thức loại-Jensen từ các hàm không lồi.

(Định lý 6) Trong tam giác ABC , ta có $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Chứng minh 3. Cho $f(x) = -\cos x$. Mục đích của chúng ta là thiết lập bất đẳng thức ba biến

$$\frac{f(A) + f(B) + f(C)}{3} \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

trong đó $A, B, C \in (0, \pi)$ với $A + B + C = \pi$. Ta tính $f'(x) = \sin x$. Phương trình đường tiếp tuyến của f tại $x = \frac{\pi}{3}$ là $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$. Để áp dụng bất đẳng thức đường supporting, ta cần chứng minh

$$-\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$$

với mọi $x \in (0, \pi)$. Đây là bất đẳng thức một-biến! Ta kết thúc chứng minh. \square

Bài toán 33. (Nhật 1997) Cho a, b , và c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Chứng minh. Vì tính thuần nhất của bất đẳng thức, ta có thể chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Ta có từ

$$\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2} + \frac{(1-2b)^2}{(1-b)^2+b^2} + \frac{(1-2c)^2}{(1-c)^2+c^2} \geq \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2a^2-2a+1} + \frac{1}{2b^2-2b+1} + \frac{1}{2c^2-2c+1} \leq \frac{27}{5}.$$

Ta thấy rằng phương trình đường tiếp tuyến của $f(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$ at $x = \frac{1}{3}$ có dạng $y = \frac{54}{25}x + \frac{27}{25}$ và

$$f(x) - \left(\frac{54}{25}x + \frac{27}{25}\right) = -\frac{2(3x-1)^2(6x+1)}{25(2x^2-2x+1)} \leq 0.$$

với mọi $x > 0$. Ta suy ra

$$\sum_{\text{cyclic}} f(a) \leq \sum_{\text{cyclic}} \frac{54}{25}a + \frac{27}{25} = \frac{27}{5}.$$

\square

CHƯƠNG 5

BÀI TOÁN

Mỗi bài toán tôi giải trở thành định lý, nó phục vụ cho việc giải các bài toán khác. Rene Descartes

5.1 Các bất đẳng thức đa biến

M 1. (IMO short-list 2003) Cho (x_1, x_2, \dots, x_n) và (y_1, y_2, \dots, y_n) là hai dãy số thực dương. Giả sử (z_1, z_2, \dots, z_n) là dãy số thực dương sao cho

$$z_{i+j}^2 \geq x_i y_j$$

với mọi $1 \leq i, j \leq n$. Cho $M = \max\{z_2, \dots, z_{2n}\}$. Chứng minh

$$\left(\frac{M + z_2 + \dots + z_{2n}}{2n} \right)^2 \geq \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \left(\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right).$$

M 2. (Bosnia và Herzegovina 2002) Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$ là các số thực dương. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^3 \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i^3 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \right)^3.$$

M 3. (C¹2113, Marcin E. Kuczma) Chứng minh

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \geq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}$$

với mọi số thực dương $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$

M 4. (Yugoslavia 1998) Cho $n > 1$ là các số dương và $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực dương. Chứng minh.

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j \right)^2 \geq \sum_{i \neq j} a_i a_j \sum_{i \neq j} b_i b_j.$$

¹CRUX with MAYHEM

M 5. (C2176, Sefket Arslanagic) Chứng minh

$$((a_1 + b_1) \cdots (a_n + b_n))^{\frac{1}{n}} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1 \cdots b_n)^{\frac{1}{n}}$$

trong đó $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$

M 6. (Korea 2001) Chứng minh x_1, \dots, x_n và y_1, \dots, y_n là các số thực thỏa mãn

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 1$$

Chứng tỏ

$$2 \left| 1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \geq (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

khi nào đẳng thức xảy ra.

M 7. (Singapore 2001) Cho $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ là các số thực dương trong 1001 và 2002. Giả sử

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^3}{b_i} \leq \frac{17}{10} \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra.

M 8. (Bất đẳng thức Abel) Cho $a_1, \dots, a_N, x_1, \dots, x_N$ là các số thực với $x_n \geq x_{n+1} > 0$ với mọi n . Chứng minh

$$|a_1 x_1 + \cdots + a_N x_N| \leq A x_1$$

trong đó

$$A = \max\{|a_1|, |a_1 + a_2|, \dots, |a_1 + \cdots + a_N|\}.$$

M 9. (China 1992) Với mỗi số nguyên $n \geq 2$ hãy tìm số dương nhỏ nhất $\lambda = \lambda(n)$ sao cho nếu

$$0 \leq a_1, \dots, a_n \leq \frac{1}{2}, \quad b_1, \dots, b_n > 0, \quad a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n = 1$$

khi đó

$$b_1 \cdots b_n \leq \lambda(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n).$$

M 10. (C2551, Panos E. Tsaousoglou) Giả sử rằng a_1, \dots, a_n là các số thực dương. Cho $e_{j,k} = n - 1$ nếu $j = k$ và $e_{j,k} = n - 2$ ngược lại. Cho $d_{j,k} = 0$ nếu $j = k$ và $d_{j,k} = 1$ ngược lại. Chứng minh rằng

$$\sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^n e_{j,k} a_k^2 \geq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n d_{j,k} a_k \right)^2$$

M 11. (C2627, Walther Janous) Cho $x_1, \dots, x_n (n \geq 2)$ là các số thực dương và cho $x_1 + \dots + x_n$. Cho a_1, \dots, a_n là các số thực không âm. Hãy xác định hằng tối ưu $C(n)$ sao cho

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j(s_n - x_j)}{x_j} \geq C(n) \left(\prod_{j=1}^n a_j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

M 12. (Cuộc thi vô địch Toán giữa Hungary-Israel năm 2000) Giả sử rằng k và l là hai số nguyên dương cho trước và $a_{ij} (1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l)$ là các số nguyên dương cho trước. Chứng minh rằng nếu $q \geq p > 0$, khi đó

$$\left(\sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^k a_{ij}^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^l a_{ij}^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

M 13. (Bất đẳng thức Kantorovich) Giả sử $x_1 < \dots < x_n$ là các số dương cho trước. Cho $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ và $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{x_i} \right) \leq \frac{A^2}{G^2},$$

trong đó $A = \frac{x_1 + x_n}{2}$ và $G = \sqrt{x_1 x_n}$.

M 14. (Czech-Slovak-Polish Match 2001) Cho $n \geq 2$ là các số nguyên. Chứng minh

$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \cdots (a_n^3 + 1) \geq (a_1^2 a_2 + 1)(a_2^2 a_3 + 1) \cdots (a_n^2 a_1 + 1)$$

với mọi số thực không âm a_1, \dots, a_n .

M 15. (C1868, De-jun Zhao) Cho $n \geq 3$, $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$, và $p > q > 0$. Chứng minh

$$a_1^p a_2^q + a_2^p a_3^q + \dots + a_{n-1}^p a_n^q + a_n^p a_1^q \geq a_1^q a_2^p + a_2^q a_3^p + \dots + a_{n-1}^q a_n^p + a_n^q a_1^p$$

M 16. (Baltic Way 1996) Với các số dương a, b . Chứng minh rằng

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n + x_n x_1 \geq x_1^a x_2^b x_3^a + x_2^a x_3^b x_4^a + \dots + x_n^a x_1^b x_2^a$$

với mọi $n > 2$ và các số thực dương x_1, \dots, x_n .

M 17. (IMO short List 2000) Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \dots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \dots + x_n^2} < \sqrt{n}.$$

M 18. (MM²1479, Donald E. Knuth) Cho M_n là giá trị lớn nhất của

$$\frac{x_n}{(1 + x_1 + \dots + x_n)^2} + \frac{x_2}{(1 + x_2 + \dots + x_n)^2} + \dots + \frac{x_1}{(1 + x_n)^2}$$

với mọi số thực không âm (x_1, \dots, x_n) . Tại điểm nào giá trị cực đại xảy ra? Hãy biểu diễn M_n theo M_{n-1} , và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$.

²Mathematics Magazine

M 19. (IMO 1971) Hãy chứng minh nhận định sau đây đúng với $n = 3$ và $n = 5$ và sai với mọi số tự nhiên $n > 2$: nếu a_1, \dots, a_n là các số thực tùy ý, khi đó

$$\sum_{i=1}^n \prod_{i \neq j} (a_i - a_j) \geq 0.$$

M 20. (IMO 2003) Cho $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ là các số thực.

(a) Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Chứng tỏ rằng đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu x_1, x_2, \dots, x_n là dãy số học.

M 21. (Bulgaria 1995) Cho $n \geq 2$ và $0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1$. Chứng minh

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

và đẳng thức khi nào xảy ra.

M 22. (MM1407, M. S. Klamkin) Hãy xác định giá trị lớn nhất của tổng

$$x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p - x_1^q x_2^r - x_2^q x_3^r - \dots - x_n^q x_1^r,$$

trong đó p, q, r là các số thỏa $p \geq q \geq r \geq 0$ và $0 \leq x_i \leq 1$ với mọi i .

M 23. (IMO Short List 1998) Cho a_1, a_2, \dots, a_n là các số thực dương sao cho

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1.$$

Chứng minh

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n (1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n))}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \dots (1 - a_n)} \leq \frac{1}{n^{n+1}}.$$

M 24. (IMO Short List 1998) Cho r_1, r_2, \dots, r_n là các số thực dương ≥ 1 . Chứng minh

$$\frac{1}{r_1 + 1} + \dots + \frac{1}{r_n + 1} \geq \frac{n}{(r_1 \dots r_n)^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

M 25. (Baltic Way 1991) Chứng minh, với bất kỳ số thực a_1, \dots, a_n ,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geq 0.$$

M 26. (India 1995) Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{x_1}{1 - x_1} + \dots + \frac{x_n}{1 - x_n} \geq \sqrt{\frac{n}{n - 1}}.$$

M 27. (Turkey 1997) Cho $n \geq 2$, Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_3 + \cdots + x_n + x_1} + \cdots \frac{x_n^5}{x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}$$

với các số thực dương x_1, \cdots, x_n subject tới điều kiện $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.

M 28. (China 1996) Giả sử $n \in \mathbf{N}$, $x_0 = 0$, $x_1, \cdots, x_n > 0$, và $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Chứng minh

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

M 29. (Vietnam 1998) Cho x_1, \cdots, x_n là các số dương sao cho

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \cdots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998}.$$

Chứng minh

$$\frac{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n-1} \geq 1998$$

M 30. (C2768 Mohammed Aassila) Cho x_1, \cdots, x_n be n là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1 x_2 + x_2^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2 x_3 + x_3^2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{x_n x_1 + x_1^2}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}$$

M 31. (C2842, George Tsintsifas) Cho x_1, \cdots, x_n là các số thực dương. Chứng minh

$$(a) \frac{x_1^n + \cdots + x_n^n}{n x_1 \cdots x_n} + \frac{n(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{x_1 + \cdots + x_n} \geq 2,$$

$$(b) \frac{x_1^n + \cdots + x_n^n}{x_1 \cdots x_n} + \frac{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{x_1 + \cdots + x_n} \geq 1.$$

M 32. (C2423, Walther Janous) Cho $x_1, \cdots, x_n (n \geq 2)$ là các số thực dương sao cho $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Chứng minh

$$\left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(\frac{n-x_1}{1-x_1}\right) \cdots \left(\frac{n-x_n}{1-x_n}\right)$$

Khi nào đẳng thức xảy ra.

M 33. (C1851, Walther Janous) Cho $x_1, \cdots, x_n (n \geq 2)$ là các số thực dương sao cho

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Chứng minh

$$\frac{2\sqrt{n}-1}{5\sqrt{n}-1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{2+x_i}{5+x_i} \leq \frac{2\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+1}.$$

M 34. (C1429, D. S. Mitirinic, J. E. Pecaric) Chứng tỏ rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq n-1$$

trong đó x_1, \cdots, x_n are $n \geq 3$ là các số thực dương. Dĩ nhiên, $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$.³

³Bài toán gốc là chứng tỏ $\sup \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} = n-1$.

M 35. (Belarus 1998 S. Sobolevski) Cho $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức

$$(a) \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

$$(b) \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{2k}{1+k^2} \cdot \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

trong đó $k = \frac{a_n}{a_1}$.

M 36. (Hong Kong 2000) Cho $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ là n số thực sao cho

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0.$$

Chứng tỏ

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + na_1a_n \leq 0.$$

M 37. (Poland 2001) Cho $n \geq 2$ là số nguyên. Chứng minh

$$\sum_{i=1}^n x_i^i + \binom{n}{2} \geq \sum_{i=1}^n ix_i$$

với mọi số thực không âm x_1, \dots, x_n .

M 38. (Korea 1997) Cho a_1, \dots, a_n là các số dương, và định nghĩa

$$A = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, G = (a_1 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}, H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

(a) Nếu n chẵn, chứng tỏ

$$\frac{A}{H} \leq -1 + 2 \left(\frac{A}{G} \right)^n.$$

(b) Nếu n lẻ, chứng tỏ

$$\frac{A}{H} \leq -\frac{n-2}{n} + \frac{2(n-1)}{n} \left(\frac{A}{G} \right)^n.$$

M 39. (Romania 1996) Cho x_1, \dots, x_n, x_{n+1} là các số thực dương sao cho

$$x_{n+1} = x_1 + \dots + x_n.$$

Chứng minh

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i(x_{n+1} - x_i)} \leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_i)}$$

M 40. (C2730, Peter Y. Woo) Cho $AM(x_1, \dots, x_n)$ và $GM(x_1, \dots, x_n)$ lần lượt ký hiệu là trung bình số học và trung bình hình học của các số dương x_1, \dots, x_n . Cho các số thực dương $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, (a) chứng tỏ

$$GM(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \geq GM(a_1, \dots, a_n) + GM(b_1, \dots, b_n).$$

với mỗi số thực $t \geq 0$, định nghĩa

$$f(t) = GM(t + b_1, t + b_2, \dots, t + b_n) - t$$

(b) Chứng minh rằng f là hàm tăng đơn điệu và rằng

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = AM(b_1, \dots, b_n)$$

M 41. (C1578, O. Johnson, C. S. Goodlad) Với mỗi số thực dương xác định a_n , cực đại hóa

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(1 + a_1)(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \cdots (a_{n-1} + a_n)}$$

với mọi số thực dương a_1, \dots, a_{n-1} .

M 42. (C1630, Isao Ashiba) Cực đại hóa

$$a_1 a_2 + a_3 a_4 + \cdots + a_{2n-1} a_{2n}$$

với mọi hoán vị a_1, \dots, a_{2n} of the set $\{1, 2, \dots, 2n\}$

M 43. (C1662, M. S. Klamkin) Chứng minh rằng

$$\frac{x_1^{2r+1}}{s - x_1} + \frac{x_2^{2r+1}}{s - x_2} + \cdots + \frac{x_n^{2r+1}}{s - x_n} \geq \frac{4^r}{(n-1)n^{2r-1}} (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots + x_n x_1)^r$$

trong đó $n > 3$, $r \geq \frac{1}{2}$, $x_i \geq 0$ với mọi i , và $s = x_1 + \cdots + x_n$. Cũng vậy, hãy tìm các giá trị n và r sao cho bất đẳng thức là sharp.

M 44. (C1674, M. S. Klamkin) Cho các số thực dương r, s và số nguyên $n > \frac{r}{s}$, tìm các số thực dương x_1, \dots, x_n tìm cực tiểu

$$\left(\frac{1}{x_1^r} + \frac{1}{x_2^r} + \cdots + \frac{1}{x_n^r} \right) (1 + x_1)^s (1 + x_2)^s \cdots (1 + x_n)^s.$$

M 45. (C1691, Walther Janous) Cho $n \geq 2$. Xác định cận trên của

$$\frac{x_1}{x_2 x_3 \cdots x_n + 1} + \frac{x_2}{x_1 x_3 \cdots x_n + 1} + \cdots + \frac{x_n}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + 1}$$

với mọi $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$.

M 46. (C1892, Marcin E. Kuczma) Cho $n \geq 4$ là một số nguyên. Tìm cận trên là cận dưới chính xác của tổng cyclic

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}$$

với mọi n -bộ các số không âm x_1, \dots, x_n sao cho $x_{i-1} + x_i + x_{i+1} > 0$ với mọi i . Dĩ nhiên, $x_{n+1} = x_1$, $x_0 = x_n$. Characterize all cases in which either one of these bounds is attained.

M 47. (C1953, M. S. Klamkin) Hãy xác định điều kiện cần và đủ theo các hằng thực r_1, \dots, r_n sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq (r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n)^2$$

xảy ra với mọi số thực x_1, \dots, x_n .

M 48. (C2018, Marcin E. Kuczma) Bao nhiêu hoán vị (x_1, \dots, x_n) của $\{1, 2, \dots, n\}$ sao cho tổng cyclic

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1|$$

là (a) cực tiểu, (b) cực đại?

M 49. (C2214, Walther Janous) Cho $n \geq 2$ là một số tự nhiên. Chứng tỏ tồn tại một hằng $C = C(n)$ sao cho với mọi $x_1, \dots, x_n \geq 0$ ta có

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n (x_i + C)}$$

Hãy xác định giá trị cực tiểu $C(n)$ với vài giá trị n . (Ví dụ, $C(2) = 1$.)

M 50. (C2615, M. S. Klamkin) Giả sử x_1, \dots, x_n là các số không âm sao cho

$$\sum x_i^2 \sum (x_i x_{i+1})^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

trong đó các tổng ở trên đối xứng theo bộ các $\{1, \dots, n\}$.

(a) Xác định giá trị lớn nhất của $\sum x_i$.

(b) Chứng minh hay bác bỏ cực tiểu của $\sum x_i$ là $\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$.

M 51. (Turkey 1996) Cho các số thực $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}, x_{2n+1} = 1$ với $x_{i+1} - x_i \leq h$ for $1 \leq i \leq n$, sao cho

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^n x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

M 52. (Poland 2002) Chứng tỏ rằng với mỗi số nguyên $n \geq 3$ và mỗi dãy số dương x_1, \dots, x_n ít nhất một trong hai bất đẳng thức thỏa :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}.$$

Ở đây, $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2, x_0 = x_n, x_{-1} = x_{n-1}$.

M 53. (China 1997) Cho x_1, \dots, x_{1997} là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_1, \dots, x_{1997} \leq \sqrt{3}, x_1 + \dots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$$

Hãy xác định giá trị cực đại của $x_1^{12} + \dots + x_{1997}^{12}$.

M 54. (C2673, George Baloglou) Cho $n > 1$ là số nguyên. (a) Chứng tỏ

$$(1 + a_1 \cdots a_n)^n \geq a_1 \cdots a_n (1 + a_1^{n-2}) \cdots (1 + a_1^{n-2})$$

với mọi $a_1, \dots, a_n \in [1, \infty)$ nếu và chỉ nếu $n \geq 4$.

(b) Chứng tỏ

$$\frac{1}{a_1(1 + a_2^{n-2})} + \frac{1}{a_2(1 + a_3^{n-2})} + \cdots + \frac{1}{a_n(1 + a_1^{n-2})} \geq \frac{n}{1 + a_1 \cdots a_n}$$

với mỗi $a_1, \dots, a_n > 0$ nếu và chỉ nếu $n \leq 3$.

(c) Chứng tỏ

$$\frac{1}{a_1(1 + a_1^{n-2})} + \frac{1}{a_2(1 + a_2^{n-2})} + \cdots + \frac{1}{a_n(1 + a_n^{n-2})} \geq \frac{n}{1 + a_1 \cdots a_n}$$

với mọi $a_1, \dots, a_n > 0$ nếu và chỉ nếu $n \leq 8$.

M 55. (C2557, Gord Sinnamon, Hans Heinig) (a) Chứng tỏ dãy các số dương $\{x_i\}$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^j x_i \leq 2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k x_j \right)^2 \frac{1}{x_k}.$$

(b) Bất đẳng thức trên vẫn đúng khi không có hệ số 2 không? (c) Hằng c tối thiểu là bao nhiêu khi thay vào hệ số 2 trong bất đẳng thức trên?

M 56. (C1472, Walther Janous) Với mỗi số nguyên $n \geq 2$, hãy tìm hằng lớn nhất C_n sao cho

$$C_n \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|$$

với mọi số thực a_1, \dots, a_n thỏa mãn $\sum_{i=1}^n a_i = 0$.

M 57. (China 2002) Cho $c \in (\frac{1}{2}, 1)$. Tìm hằng nhỏ nhất M sao cho, với bất kỳ số nguyên $n \geq 2$ và các số thực $1 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, if

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k \leq c \sum_{k=1}^n a_k,$$

khi đó

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq M \sum_{k=1}^m k a_k,$$

trong đó m là số nguyên lớn nhất và không lớn hơn cn .

M 58. (Serbia 1998) Cho x_1, x_2, \dots, x_n là các số dương sao cho

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geq \frac{n^2}{2},$$

đúng với mỗi số thực dương a . Xác định đẳng thức xảy ra khi nào.

M 59. (MM1488, Heinz-Jurgen Seiffert) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu $0 < x_1 \leq x_2 \leq x_n$, thì

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \left(\sum_{j=0}^n \prod_{k=1}^j \frac{1}{x_k} \right) \geq 2^n (n + 1)$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \dots = x_n = 1$.

M 60. (Leningrad Mathematical Olympiads 1968) Cho a_1, a_2, \dots, a_p là các số thực. Cho $M = \max S$ và $m = \min S$. Chứng minh rằng

$$(p - 1)(M - m) \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_i - a_j| \leq \frac{p^2}{4}(M - m)$$

M 61. (Leningrad Mathematical Olympiads 1973) Hãy thiết lập bất đẳng thức sau

$$\sum_{i=0}^8 2^i \cos \left(\frac{\pi}{2^{i+2}} \right) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2^{i+2}} \right) \right) < \frac{1}{2}.$$

M 62. (Leningrad Mathematical Olympiads 2000) Chứng minh rằng, với mọi $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

$$\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{x_2 x_3}{x_4} + \dots + \frac{x_{n-1} x_n}{x_2} + \frac{x_n x_1}{x_2} \geq \sum_{i=1}^n x_i$$

M 63. (Mongolia 1996) Chứng minh, với mọi $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$,

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right) \left(\frac{a_2 + a_3}{2} \right) \dots \left(\frac{a_n + a_1}{2} \right) \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right) \left(\frac{a_2 + a_3 + a_4}{3} \right) \dots \left(\frac{a_n + a_1 + a_2}{3} \right).$$

5.2 Các bài toán trong hội thảo Putnam

P 1. [Putnam 04A6] Giả sử $f(x, y)$ là hàm thực liên tục trên hình vuông đơn vị $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Chứng minh

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right)^2 dx \\ & \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y))^2 dx dy. \end{aligned}$$

P 2. [Putnam 04B2] Cho m và n là các số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m} \frac{n!}{n^n}.$$

P 3. [Putnam 03A2] Cho a_1, a_2, \dots, a_n và b_1, b_2, \dots, b_n là các số thực không âm. Chứng minh

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq [(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)]^{1/n}.$$

P 4. [Putnam 03A3] Tìm giá trị cực tiểu của

$$|\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$$

với các số thực x .

P 5. [Putnam 03A4] Giả sử rằng a, b, c, A, B, C là các số thực, $a \neq 0$ và $A \neq 0$, sao cho

$$|ax^2 + bx + c| \leq |Ax^2 + Bx + C|$$

với mọi số thực x . Chứng minh

$$|b^2 - 4ac| \leq |B^2 - 4AC|.$$

P 6. [Putnam 03B6] Cho $f(x)$ là hàm số thực liên tục xác định trên khoảng $[0, 1]$. Sao cho

$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)| dx dy \geq \int_0^1 |f(x)| dx.$$

P 7. [Putnam 02B3] Chứng minh rằng, với mọi số nguyên $n > 1$,

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

P 8. [Putnam 01A6] Một cung của parabol có thể nằm trong một đường tròn bán kính 1 có chiều dài lớn hơn 4?

P 9. [Putnam 99A5] Chứng minh rằng tồn tại một hằng C sao cho, nếu $p(x)$ là một đa thức bậc 1999, khi đó

$$|p(0)| \leq C \int_{-1}^1 |p(x)| dx.$$

P 10. [Putnam 99B4] Cho f là hàm thực đạo hàm bậc ba liên tục sao cho $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x)$ là các số dương với mọi x . Giả sử $f'''(x) \leq f(x)$ với mọi x . Chứng minh rằng $f'(x) < 2f(x)$ for all x .

P 11. [Putnam 98B4] Cho $a_{m,n}$ ký hiệu hệ số của x^n trong khai triển của $(1+x+x^2)^m$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên $k \geq 0$,

$$0 \leq \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{2k}{3} \rfloor} (-1)^i a_{k-i,i} \leq 1.$$

P 12. [Putnam 98B1] Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$$

for $x > 0$.

P 13. [Putnam 96B2] Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ,

$$\left(\frac{2n-1}{e}\right)^{\frac{2n-1}{2}} < 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) < \left(\frac{2n+1}{e}\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

P 14. [Putnam 96B3] Cho $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$, tìm, bằng chứng minh, giá trị lớn nhất có thể, như một hàm của n (với $n \geq 2$), của

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

P 15. [Putnam 91B6] Cho a và b là các số dương. Hãy tìm số lớn nhất c , dưới dạng của a và b , sao cho

$$a^xb^{1-x} \leq a \frac{\sinh ux}{\sinh u} + b \frac{\sinh u(1-x)}{\sinh u}$$

với mọi u với $0 < |u| \leq c$ và với mọi x , $0 < x < 1$.

P 16. (CMJ⁴416, Joanne Harris) Với giá trị nào của c sao cho

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{cx^2}.$$

với mọi x thực?

P 17. (CMJ420, Edward T. H. Wang) Ta dễ thấy rằng [Daniel I. A. Cohen, Các kỹ thuật cơ bản trong Lý thuyết Tổ hợp, trang.56] $2^n < \binom{2n}{n} < 2^{2n}$ với mọi số nguyên $n > 1$. Chứng minh rằng các bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{2^{2n-1}}{\sqrt{n}} < \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}$$

xảy ra với mọi $n \geq 4$.

⁴The College Mathematics Journal

P 18. (CMJ379, Mohammad K. Azarian) Cho x là số thực bất kỳ. Chứng minh

$$(1 - \cos x) \left| \sum_{k=1}^n \sin(kx) \right| \left| \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right| \leq 2.$$

P 19. (CMJ392 Robert Jones) Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x \sin \frac{1}{x}\right) > 1 \text{ for } x \geq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

P 20. (CMJ431 R. S. Luthar) Cho $0 < \phi < \theta < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng

$$[(1 + \tan^2 \phi)(1 + \sin^2 \phi)]^{\csc^2 \phi} < [(1 + \tan^2 \theta)(1 + \sin^2 \theta)]^{\csc^2 \theta}.$$

P 21. (CMJ451, Mohammad K. Azarian) Chứng minh rằng

$$\pi^{\sec^2 \alpha} \cos^2 \alpha + \pi^{\csc^2 \alpha} \sin^2 \alpha \geq \pi^2,$$

provided $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

P 22. (CMJ446, Norman Schaumberger) Nếu x , y , và z là số đo các góc của một tam giác (không suy biến), chứng minh rằng

$$\pi \sin \frac{3}{\pi} \geq x \sin \frac{1}{x} + y \sin \frac{1}{y} + z \sin \frac{1}{z}.$$

P 23. (CMJ461, Alex Necochea) Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$ và $0 < y < 1$. Chứng minh rằng

$$x - \arcsin y \leq \frac{\sqrt{1 - y^2 - \cos x}}{y},$$

bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = \sin x$.

P 24. (CMJ485 Norman Schaumberger) Chứng minh rằng

- (1) nếu $a \geq b > 1$ hay $1 > a \geq b > 0$, thì $a^{b^b} b^{a^a} \geq a^{b^a} b^{a^b}$; và
- (2) nếu $a > 1 > b > 0$, thì $a^{b^b} b^{a^a} \leq a^{b^a} b^{a^b}$.

P 25. (CMJ524 Norman Schaumberger) Cho a , b , và c là các số thực dương. Chứng minh

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^a \left(\frac{b+c}{2}\right)^b \left(\frac{c+a}{2}\right)^c \geq b^a c^b a^c.$$

P 26. (CMJ567 H.-J. Seiffert) Chứng minh rằng với mọi số thực dương phân biệt x và y ,

$$\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}\right)^2 < \frac{x-y}{2 \sinh \frac{x-y}{x+y}} < \frac{x+y}{2}.$$

P 27. (CMJ572, George Baloglou và Robert Underwood) Chứng minh hay bác bỏ rằng với $\theta \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\cosh \theta \leq \frac{1}{\sqrt{1-\tan^2 \theta}}$.

P 28. (CMJ603, Juan-Bosco Romero Marquez) Cho a và b là các số thực dương phân biệt và cho n là số nguyên dương. Chứng minh

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}} \leq \sqrt[n]{\frac{a^n + b^n}{2}}.$$

P 29. (MM⁵904, Norman Schaumberger) Cho $x > 2$, chứng minh

$$\ln \left(\frac{x}{x-1} \right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{x^{2j}} \leq \ln \left(\frac{x-1}{x-2} \right).$$

P 30. (MM1590, Constantin P. Niculescu) Với a , $0 < a < \frac{\pi}{2}$ cho trước, hãy xác định giá trị nhỏ nhất của $\alpha \geq 0$ và giá trị lớn nhất của $\beta \geq 0$ với

$$\left(\frac{x}{a} \right)^{\alpha} \leq \frac{\sin x}{\sin a} \leq \left(\frac{x}{a} \right)^{\beta}.$$

(Tổng quát hóa thì trở thành bất đẳng thức quen thuộc Jordan $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq 1$ on $[0, \frac{\pi}{2}]$.)

P 31. (MM1597, Constantin P. Niculescu) Với mỗi $x, y \in (0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ với $x \neq y$, chứng minh rằng

$$\left(\ln \frac{1 - \sin xy}{1 + \sin xy} \right)^2 \geq \ln \frac{1 - \sin x^2}{1 + \sin x^2} \ln \frac{1 - \sin y^2}{1 + \sin y^2}.$$

P 32. (MM1599, Ice B. Risteski) Cho $\alpha > \beta > 0$ và $f(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$. Nếu $0 < a < b < 1$ và $f(a) = f(b)$, chứng tỏ rằng $f'(\alpha) < -f'(\beta)$.

P 33. (MM Q197, Norman Schaumberger) Chứng tỏ rằng nếu $b > a > 0$, thì $\left(\frac{a}{b}\right)^a \geq \frac{e^a}{e^b} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^b$.

P 34. (MM1618, Michael Golomb) Chứng tỏ rằng $0 < x < \pi$,

$$x \frac{\pi - x}{\pi + x} < \sin x < \left(3 - \frac{x}{\pi}\right) x \frac{\pi - x}{\pi + x}.$$

P 35. (MM1634, Constantin P. Niculescu) Hãy tìm hằng nhỏ nhất $k > 0$ sao cho

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq k(a+b+c)$$

với mọi $a, b, c > 0$.

P 36. (MM1233, Robert E. Shafer) Chứng minh rằng nếu $x > -1$ và $x \neq 0$, khi đó

$$\frac{x^2}{1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{\frac{x^4}{120}}{1+x+\frac{31}{252}x^2}} < [\ln(1+x)]^2 < \frac{x^2}{1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{\frac{x^4}{240}}{1+x+\frac{1}{20}x^2}}.$$

⁵Mathematics Magazine

P 37. (MM1236, Mihaly Bencze) Cho các hàm số f và g được xác định bởi

$$f(x) = \frac{\pi^2 x}{2\pi^2 + 8x^2} \quad \text{và} \quad g(x) = \frac{8x}{4\pi^2 + \pi x^2}$$

với mọi số thực x . Chứng minh rằng nếu A , B , và C là các góc của một tam giác nhọn, và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác khi đó

$$f(A) + f(B) + f(C) < \frac{a + b + c}{4R} < g(A) + g(B) + g(C).$$

P 38. (MM1245, Fouad Nakhli) Với mỗi số x khoảng khoảng mở $(1, e)$ ta dễ chứng tỏ rằng có một số duy nhất y trong (e, ∞) sao cho $\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x}$. Với x và y như vậy, chứng minh rằng $x + y > x \ln y + y \ln x$.

P 39. (MM Q725, S. Kung) Chứng minh rằng $(\sin x)y \leq \sin(xy)$, trong đó $0 < x < \pi$ và $0 < y < 1$.

P 40. (MM Q771, Norman Schaumberger) Chứng minh rằng nếu $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, khi đó $\sin 2\theta \geq (\tan \theta)^{\cos 2\theta}$.

Tài liệu tham khảo

- AB K. S. Kedlaya, $A < B$, <http://www.unl.edu/amc/a-activities/a4-for-students/s-index.html>
- AI D. S. Mitinović (in cooperation with P. M. Vasić), *Analytic Inequalities*, Springer
- AK F. F. Abi-Khuzam, *A Trigonometric Inequality and its Geometric Applications*, Mathematical Inequalities and Applications, Vol. 3, No. 3 (2000), 437-442
- AMN A. M. Nesbitt, Problem 15114, Educational Times (2) 3(1903), 37-38
- AP A. Padoa, Period. Mat. (4)5 (1925), 80-85
- Au99 A. Storožhev, *AMOC Mathematics Contests 1999*, Australian Mathematics Trust
- DP D. Pedoe, *Thinking Geometrically*, Amer. Math. Monthly 77(1970), 711-721
- EC E. Cesáro, Nouvelle Correspondence Math. 6(1880), 140
- ESF Elementare Symmetrische Funktionen,
<http://hydra.nat.uni-magdeburg.de/math4u/var/PU4.html>
- EWK-KE Eric W. Weisstein. "Kantorovich Inequality." From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/KantorovichInequality.html>
- EWK-AI Eric W. Weisstein. "Abel's Inequality." From MathWorld—A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/AbelsInequality.html>
- GC G. Chang, *Proving Pedoe's Inequality by Complex Number Computation*, Amer. Math. Monthly 89(1982), 692
- GI O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen 1969
- HFS H. F. Sandham, Problem E819, Amer. Math. Monthly 55(1948), 317
- IN I. Niven, *Maxima and Minima Without Calculus*, MAA
- IV Ilan Vardi, *Solutions to the year 2000 International Mathematical Olympiad*
<http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Ilan.Vardi/publications.html>
- JC Ji Chen, Problem 1663, Crux Mathematicorum 18(1992), 188-189
- JfdWm J. F. Darling, W. Moser, Problem E1456, Amer. Math. Monthly 68(1961) 294, 230
- JmhMh J. M. Habeb, M. Hajja, *A Note on Trigonometric Identities*, Expositiones Mathematicae 21(2003), 285-290
- KBS K. B. Stolarsky, *Cubic Triangle Inequalities*, Amer. Math. Monthly (1971), 879-881
- KYL Kin Y. Li, *Majorization Inequality*, Mathematical Excalibur, (5)5 (2000), 2-4

- KWL Kee-Wai Liu, Problem 2186, *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, 23(1997), 71-72
- LC1 L. Carlitz, *An Inequality Involving the Area of Two Triangles*, *Amer. Math. Monthly* 78(1971), 772
- LC2 L. Carlitz, *Some Inequalities for Two Triangles*, *Amer. Math. Monthly* 80(1973), 910
- MB L. J. Mordell, D. F. Barrow, Problem 3740, *Amer. Math. Monthly* 44(1937), 252-254
- MC M. Cipu, Problem 2172, *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, 23(1997), 439-440
- MCo M. Colind, *Educational Times* 13(1870), 30-31
- MEK Marcin E. Kuczma, Problem 1940, *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, 23(1997), 170-171
- MP M. Petrović, *Računanje sa brojnim razmacima*, Beograd 1932, 79
- MEK2 Marcin E. Kuczma, Problem 1703, *Crux Mathematicorum* 18(1992), 313-314
- NC *A note on convexity*, *Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, 23(1997), 482-483
- ONI T. Andreescu, V. Cirtoaje, G. Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*
- PF P. Flor, *Über eine Ungleichung von S. S. Wagner*, *Elem. Math.* 20, 136(1965)
- RAS R. A. Satnoianu, *A General Method for Establishing Geometric Inequalities in a Triangle*, *Amer. Math. Monthly* 108(2001), 360-364
- RI K. Wu, Andy Liu, *The Rearrangement Inequality*, ??
- RS R. Sondat, *Nouv. Ann. Math.* (3) 10(1891), 43-47
- SR S. Rabinowitz, *On The Computer Solution of Symmetric Homogeneous Triangle Inequalities*, *Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISAAC 1989)*, 272-286
- SR2 S. Reich, Problem E1930, *Amer. Math. Monthly* 73(1966), 1017-1018
- TD Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhauser
- TF G. B. Thomas, Jr., Ross L. Finney *Calculus and Analytic Geometry* 9th ed, Addison-Wesley Publishing Company
- TJM T. J. Mildorf, *Olympiad Inequalities*, <http://web.mit.edu/tmildorf/www/>
- TZ T. Andreescu, Z. Feng, *103 Trigonometry Problems From the Training of the USA IMO Team*, Birkhauser
- WJB W. J. Blundon, *Canad. Math. Bull.* 8(1965), 615-626

WJB2 W. J. Blundon, Problem E1935, Amer. Math. Monthly 73(1966), 1122

WR Walter Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed, McGraw-Hill Book Company

ZsJc Zun Shan, Ji Chen, Problem 1680, Crux Mathematicorum 18(1992), 251